28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

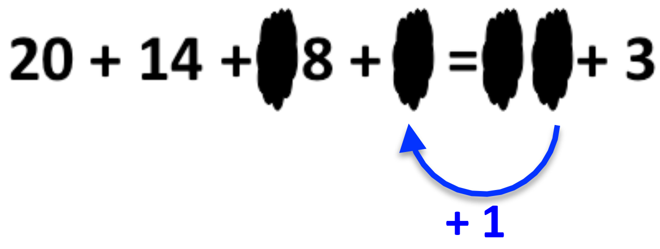
Finale des 28 et 29 août 2014

Solutions (RAMA)

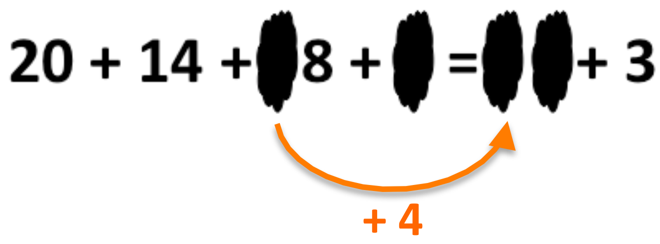
Jour 1 – Problème 1 – Les taches d'encre

- Il manque 5, 6, 7 et 9

- Le chiffre des unités à gauche est supérieur de 1 à celui à droite car 0 + 4 + 8 + 1 = 10 + 3



- Le chiffre des dizaines à droite est supérieur de 4 à celui à gauche car 20 + 14 + 8 + 1 = 40 + 3
- C'est forcément le 9 (5 + 4)



- Nous plaçons les 6 et 7 (6 + 1)
- Nous vérifions que le résultat des deux additions est le même, 99
- *La réponse est unique*

$$\boxed{20 + 14 + 58 + 7 = 96 + 3}$$

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 2 - Les années à risque

- Cherchons d'abord les années $\underline{2ABC}$ avec $\underline{ABC} > 314$
- **Si le plus grand des deux nombres de deux chiffres est le premier**

$$2 + A + B + C = \underline{2A} - \underline{BC} + 1$$

- A peut prendre n'importe quelle valeur

$$2 + \cancel{A} + B + C = 20 + \cancel{A} - 10\,B - C + 1$$

- B = 1 et C = 4

$$11\,B + 2\,C = 19$$

- Après 2314, la suivante sera **2414**

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 2 - Les années à risque

- **<u>Si le plus grand des deux nombres de deux chiffres est le second</u>**

$$2 + A + B + C = \underline{BC} - \underline{2A} + 1$$

- C peut prendre n’importe quelle valeur
- C = 0 au minimum

$$2 + A + B + \cancel{C} = 10\,B + \cancel{C} - 20 - A + 1$$

- A = 3 et B = 3
- Après 2314, la suivante sera **2330**

$$21 + 2\,A = 9\,B$$

- **2330** sera avant **2414**
- La réponse est **2330**

Jour 1 – Problème 3 – Vrai ou faux

- Etudions tous les cas possibles
  pour les trois premiers habitants ayant parlé

- Le 4ème dit « exactement l'un des trois qui ont parlé avant moi a menti. »

Habitants	1er, 2ème et 3ème	4ème	5ème	6ème
	V V V	F		
	V V F, V F V ou F V V	V		
	V F F, F V F ou F F V	F		
	F F F	F		

Jour 1 – Problème 3 – Vrai ou faux

- Le 5ème dit « jusque-là, exactement deux des quatre qui ont parlé avant moi ont menti. »

Habitants	1er, 2ème et 3ème	4ème	5ème	6ème
	V V V	F	F	
	V V F, V F V ou F V V	V	F	
	V F F, F V F ou F F V	F	F	
	F F F	F	F	

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 3 – Vrai ou faux

- Le 6ème dit « maintenant, exactement trois des cinq qui ont parlé avant moi ont menti. »

Habitants	1er, 2ème et 3ème	4ème	5ème	6ème
	V V V	F	F	F
	V V F, V F V ou F V V	**V**	**F**	**F**
	V F F, F V F ou F F V	F	F	F
	F F F	F	F	F

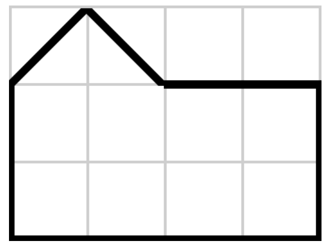
- Celui des trois derniers habitants qui est membre de la tribu **V** est le **4ème**
- *La réponse est unique*

- *N.B. En fonction de la formulation de l'énoncé, la réponse 1er (des 3 derniers et non de tous les 6) a également été admise.*

Jour 1 – Problème 4 – Les fissures

- Chacune des trois surfaces a la même aire que 3 carrés du quadrillage

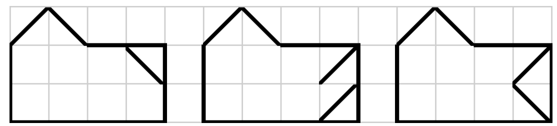
- Chaque part ne peut pas être formée avec 3 carrés à cause des 2 traits obliques en haut à gauche



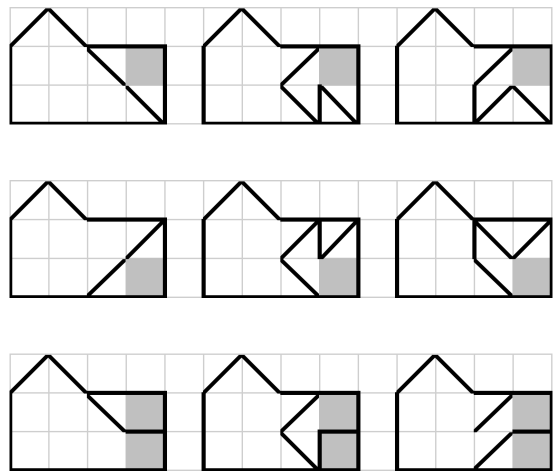
FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 4 – Les fissures

- Chaque part ne peut pas être formée avec 0 carré et 6 triangles



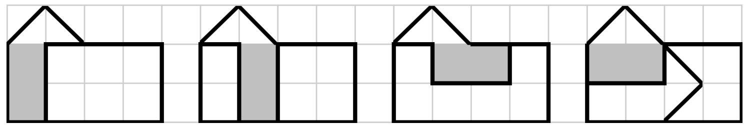
- Chaque part ne peut pas être formée avec 1 carré et 4 triangles

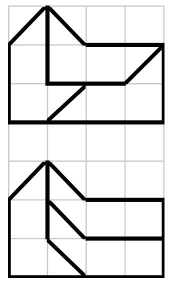


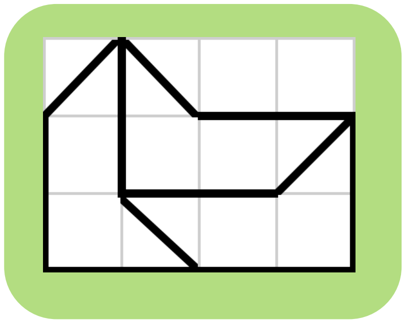
- Chaque part est formée avec **2 carrés et 2 triangles**

Jour 1 – Problème 4 – Les fissures

- Les deux triangles en haut à gauche n'appartiennent pas à la même part





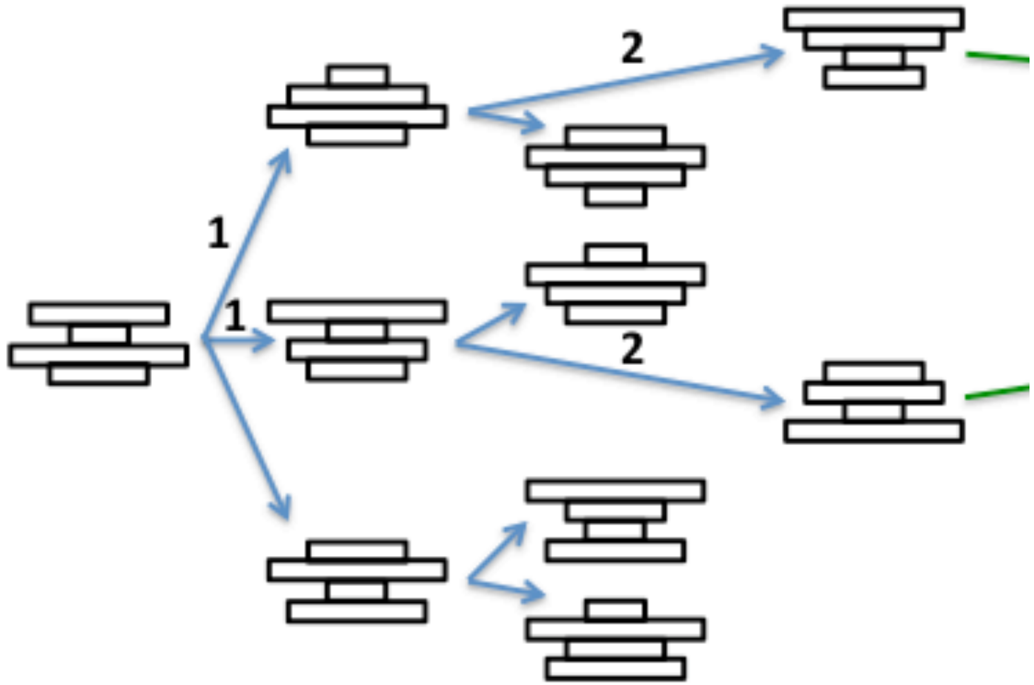


- *La réponse est unique*

Jour 1 – Problème 5 – Les crêpes

- Effectuons systématiquement les deux premières opérations

- Pour la deuxième opération, n’allons pas au départ

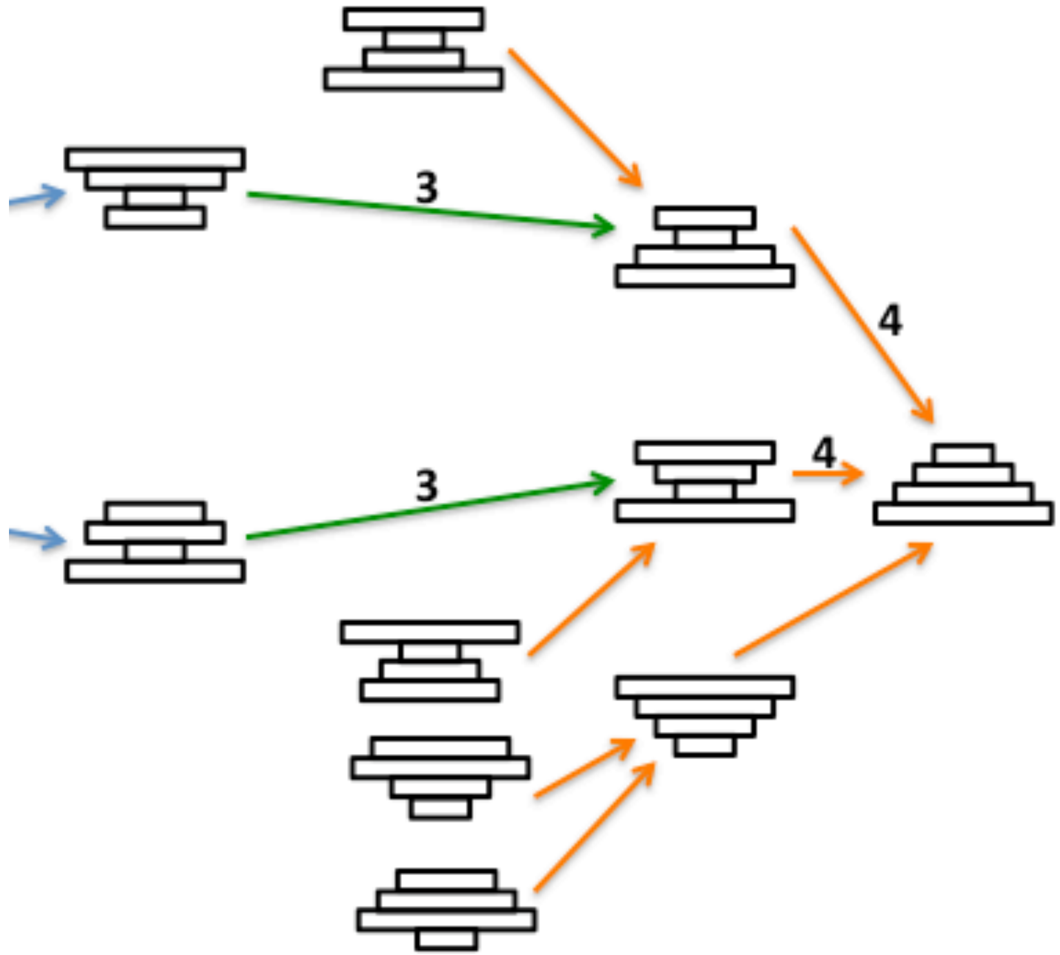


Jour 1 – Problème 5 – Les crêpes

- Effectuons systématiquement les deux dernières opérations

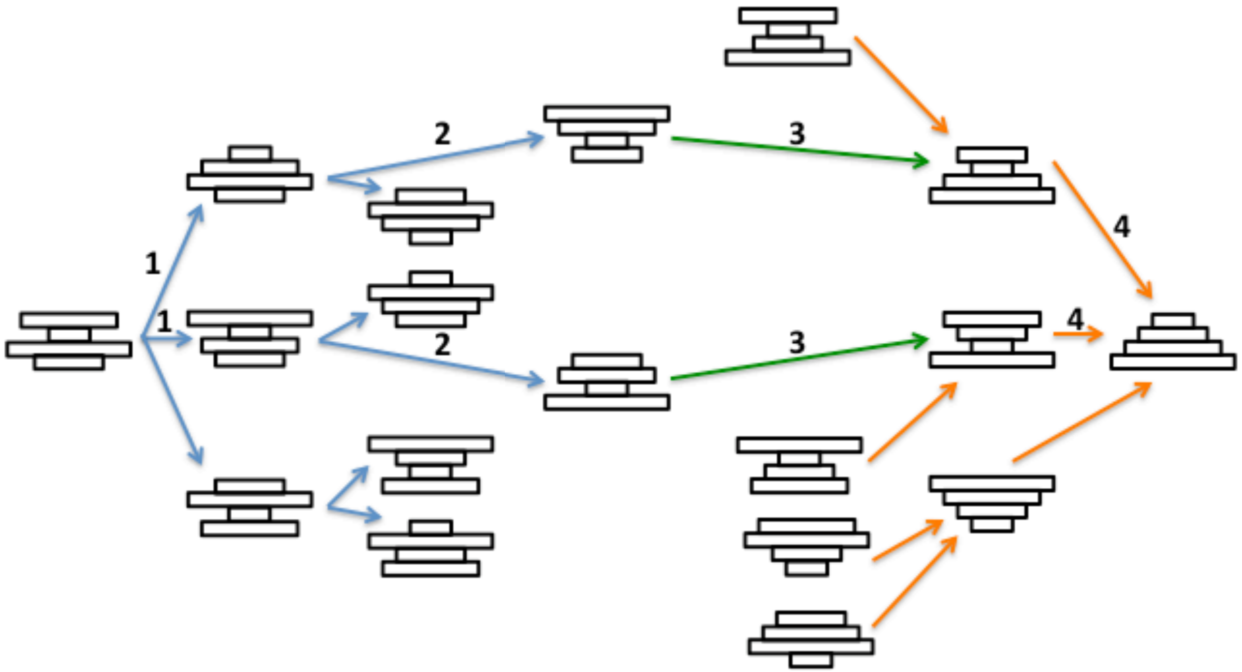
- Pour l'avant-dernière opération, ne venons pas de l'arrivée

- Nous retrouvons deux situations précédentes



FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 5 – Les crêpes



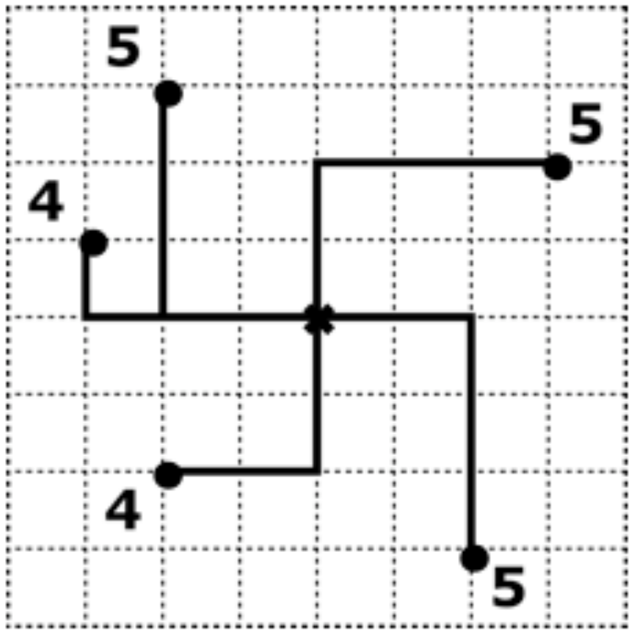
- La réponse est **4** opérations au minimum

- *Nous avons montré que deux séquences atteignent ce minimum*

Jour 1 – Problème 6 – L'araignée

- Nous vérifions
  qu'au sommet marqué d'une croix,
  la somme des distances
  aux 5 garde-manger est
  4 + 4 + 5 + 5 + 5 = 23

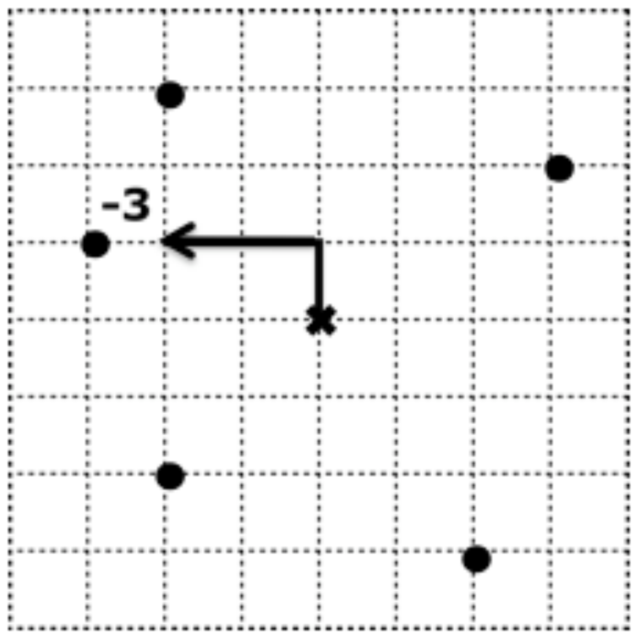
- Pour diminuer la somme,
  nous devons,
  verticalement ou horizontalement,
  nous rapprocher de 3 garde-manger
  et nous éloigner des 2 autres



Jour 1 – Problème 6 – L'araignée

- En effectuant le trajet sur la figure, la somme diminue trois fois de 1, soit de 3

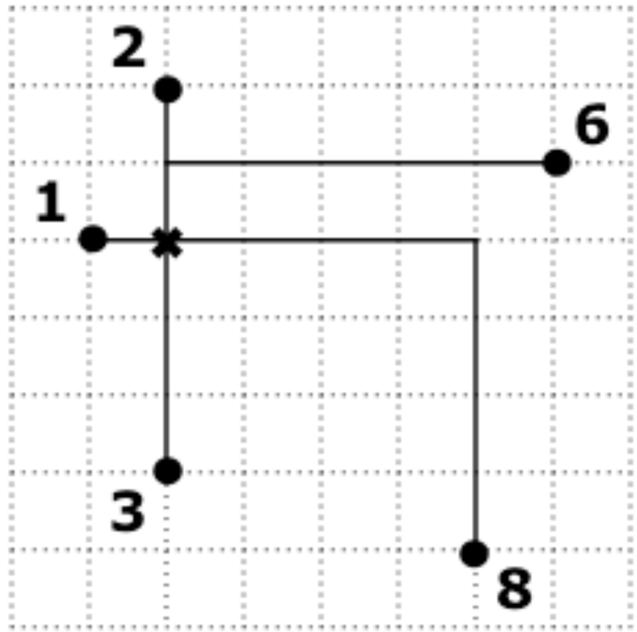
- La somme augmenterait de
4 – 1 = 3 vers la gauche
ou de 3 – 2 = 1 dans chacune des trois autres directions
- C'est la plus petite possible



Jour 1 – Problème 6 – L'araignée

- Nous vérifions
  que la somme devient
  3 + 1 + 2 + 6 + 8 = 20 = 23 - 3

- La réponse est **20**

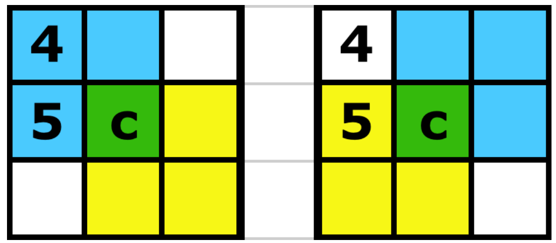


FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 7 – Les carrés

- La somme des entiers de 1 à 9 est 45

- Soit S la somme dans chaque carré 2 x 2
- Soit c le nombre dans la case centrale
- La somme des nombres dans deux coins opposés est 45 – 2 S + c



- La somme des nombres dans deux coins opposés est au moins (1 + 2 + 3 + 4) / 2 = 5
- 2 S ≤ 45 + c – 5 < 50

- Nous allons tester si le maximum théorique S = 24 peut être atteint (pour **c = 8 ou 9**)

FFJM - 28^{e} Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 7 – Les carrés

- **Si c = 9**
- La somme des nombres dans deux coins opposés est 45 – 48 + 9 = 6
- 6 est obtenu avec (1,5) et (2,4)
- D’où une **contradiction**
  car 5 est déjà au milieu d’un côté

- **c = 8**
- La somme des nombres dans deux coins opposés est 45 – 48 + 8 = 5
- 5 est obtenu avec (1,4) et (2,3) (**2 cas**)

4		3
5	8	
2		1

ou

4		2
5	8	
3		1

Jour 1 – Problème 7 – Les carrés

- Nous plaçons 24 – 4 – 5 – 8 = **7**

4	7	3			4	7	2
5	8		ou		5	8	7
2		1			3	8	1

- Dans le **second cas** (à droite), 24 – 7 – 8 – 2 = **7** est doublé
- D'où une **contradiction**

- Continuons dans le **premier cas** (à gauche)
- Le maximum théorique (S = 24) peut être atteint
- C'est l'unique réponse

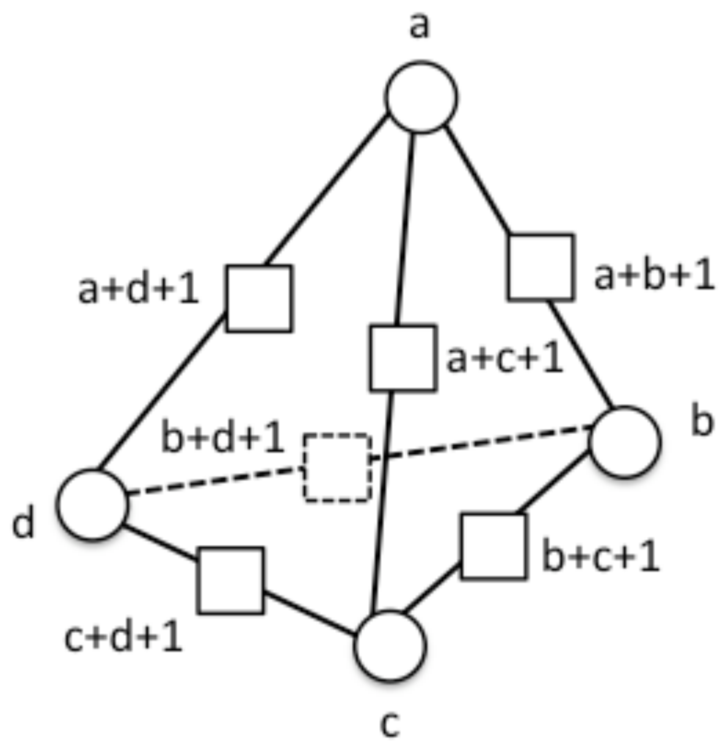
4	7	3
5	8	6
2	9	1

Jour 1 – Problème 8 – Le tétraèdre

- La somme des entiers de 1 à 11 est 66

- Soit x le nombre non utilisé
- 4(a+b+c+d) + 6 = 66 – x
- (a+b+c+d) + x/4 = 15
- x = **4** ou **8**

- Le numéro d'une arête est au moins (1 + 2) + 1 = 4
- 1 et 2 sont trop petits pour numéroter une arête, ils numérotent deux sommets reliés par une arête numérotée 4
- **4 est utilisé**, x ≠ **4**, x = **8**

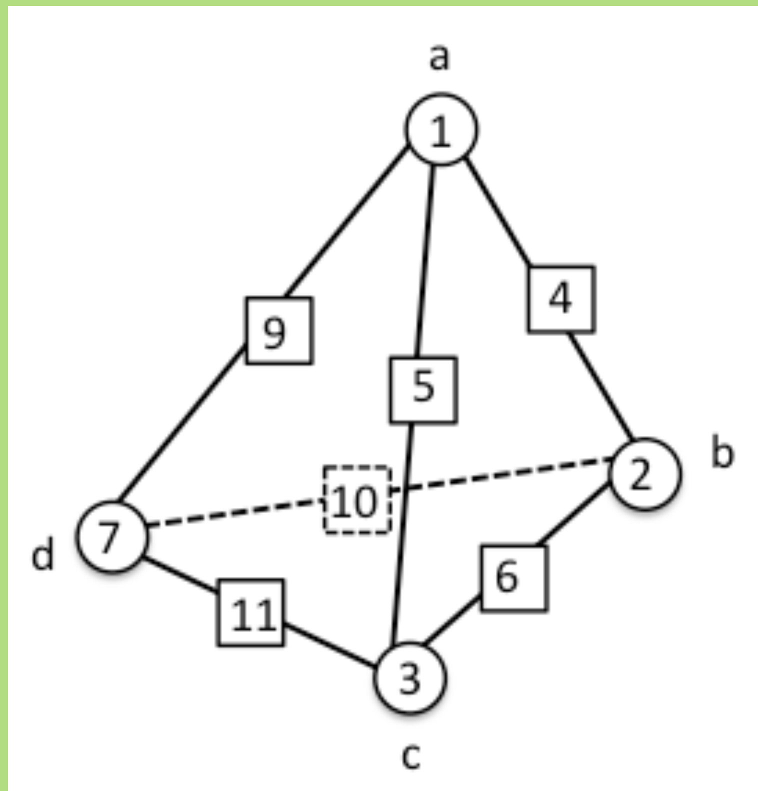


Jour 1 – Problème 8 – Le tétraèdre

- **8 n'est pas utilisé**
- (a+b+c+d) = 13

- Deux sommets numérotés 1 et 2 sont reliés par une arête numérotée 4
- Aucun sommet n'est numéroté 4
- La seule façon d'obtenir 13 est de numéroter les sommets 1, 2, 3 et 7

- *La réponse est unique*



FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 9 – Calcul décimal

$$\bigcirc + \square + \triangle = 4,8$$

$$\square + \triangle + \bigcirc = 8,6$$

$$\triangle + \bigcirc + \square = 7,0$$

$$\bigcirc + \square + \cancel{\triangle} + \square + \cancel{\triangle} + \bigcirc - \cancel{\triangle} - \bigcirc - \square = 4,8 + 8,6 - 7,0$$

$$2\bigcirc + 2\square = 6,4$$

$$\bigcirc + \square = 3,2$$

$$\boxed{\bigcirc = 0,2 \quad \text{et} \quad \square = 3}$$

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 9 – Calcul décimal

$\bigcirc + \square = 3,2$

$\boxed{\bigcirc + \square + \triangle = 4,8}$

$\boxed{\square + \triangle + \bigcirc = 8,6}$

$\bigcirc + \triangle = 1,6$

$\square + \triangle = 5,4$

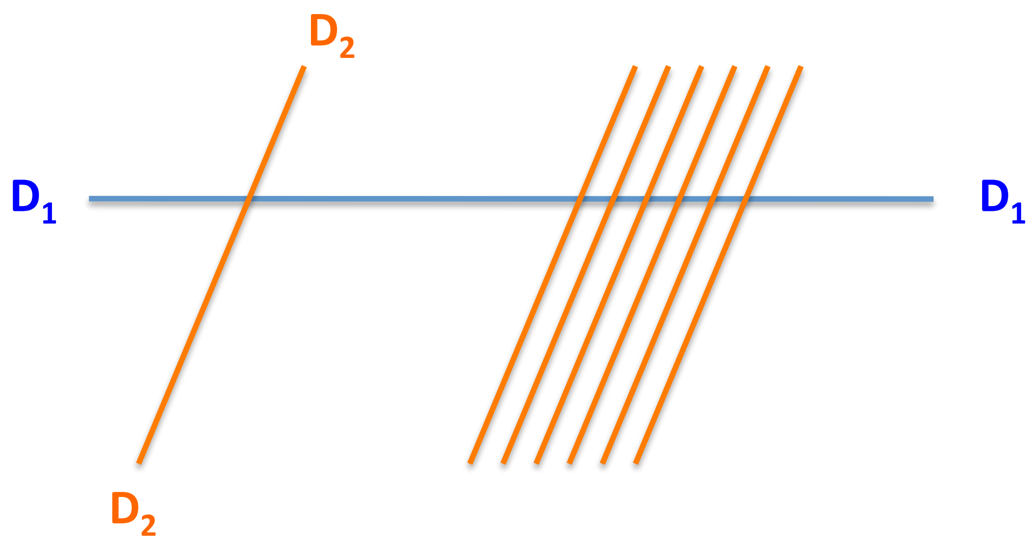
$\triangle = 0,6$ et $\bigcirc = 1$

$\square = 0,4$ et $\triangle = 5$

- L'unique réponse est $\boxed{\bigcirc = 1,2 \quad \square = 3,4 \quad \triangle = 5,6}$

Jour 1 – Problème 10 – Les droites

- La droite D_1 coupe 20 droites
- La droite D_2 coupe 14 droites
- D_1 et D_2 ne sont pas parallèles
  car elles ne coupent pas le même nombre de droites

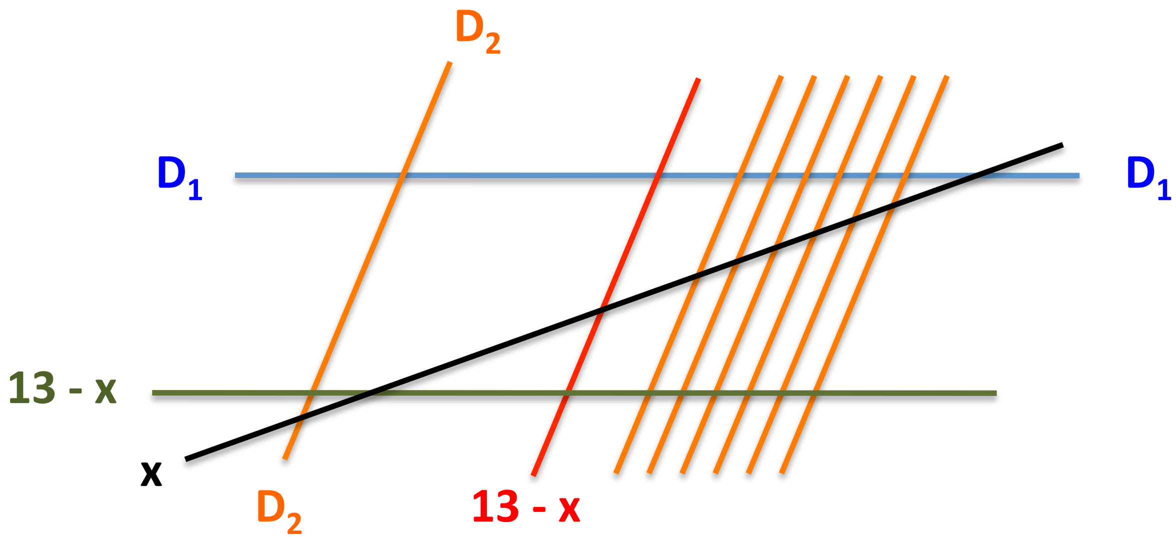


- D_1 coupe au moins 20 - 14 = 6 droites parallèles à D_2

Jour 1 – Problème 10 – Les droites

- **Si une droite D_3 coupe le minimum de droites,**
  et si ce minimum est strictement inférieur à 14 (nous le vérifierons),
  alors elle coupe D_1 et D_2
  et toutes les autres droites (x - 1) qui coupent D_1 et D_2 lui sont parallèles

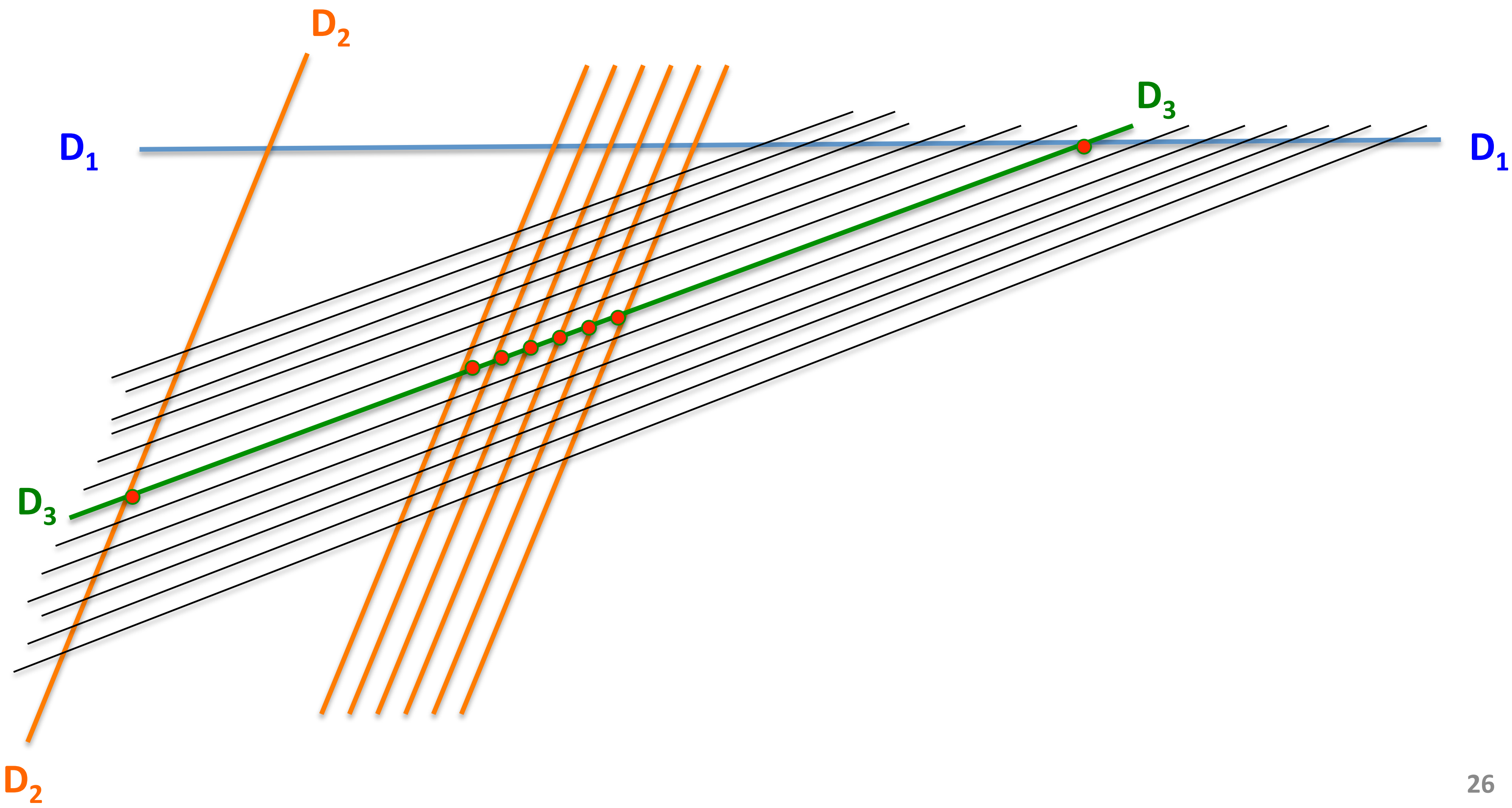
- D_3 coupe 1 + (13 - x) + (13 - x) + 6 + 1 = (34 - 2x) droites



- Le minimum est atteint pour x maximum, soit x = 13 (13 - x = 0)

Jour 1 – Problème 10 – Les droites

- La réponse est 34 – (2 x 13) = **8**



Jour 1 – Problème 11 – La finale WPC

- Le total des points est 45

Nombre d'épreuves	45	15	9	5	3	1
Total des points sur une épreuve	**1**	**3**	**5**	**9**	**15**	45

- Le total des points sur une épreuve est au moins 3 + 2 + 1 = **6**
- Il y a au moins **2** épreuves, Sudoku et Kakuro
- **Deux cas** restent à étudier

Jour 1 – Problème 11 – La finale WPC

- **Si 5 épreuves totalisent chacune 9 points**
- Si les points d'une épreuve sont **4 3 2**, alors Wit, qui a reçu 20 points, est toujours première, et Pat ne l'est jamais (Sudoku)
- Si les points d'une épreuve sont **5 3 1**, tous impairs, alors le total sur les 5 épreuves ne peut pas être pair (20 ou 14)
- Les points d'une épreuve sont **6 2 1**

- Le tableau de répartition des points est forcé et donne une première solution, **2**

Wit	6	6	6	1	1
Pat	**2**	**2**	**2**	6	**2**
Cho	1	1	1	2	6

Jour 1 – Problème 11 – La finale WPC

- **Si 3 épreuves totalisent chacune 15 points**
- Nous cherchons à décomposer 11, puis 14 et enfin 20 en trois

1ère place	12	11	10	10	9	9	8	8	**8**	**7**	7	6
2ème place	2	3	4	3	5	4	6	5	**4**	**6**	5	5
3ème place	1	1	1	2	1	2	1	2	**3**	**2**	3	4
20									O	O		
14					N				O	O	N	
11	N	N	N	N	O	N	N	N	O	O	O	N

- **Deux sous-cas** restent à étudier

Jour 1 – Problème 11 – La finale WPC

- Si les points d'une épreuve sont **7 6 2**, le tableau de répartition des points est forcé et Pat n'est jamais première (Sudoku)

Wit	7	7	6
Pat	6	6	2
Cho	2	2	7

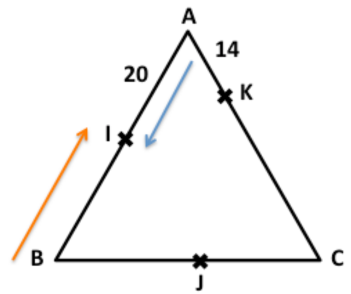
- Si les points d'une épreuve sont **8 4 3**, le tableau de répartition des points est forcé et donne une seconde solution, **3**

Wit	8	8	4
Pat	**3**	**3**	8
Cho	4	4	3

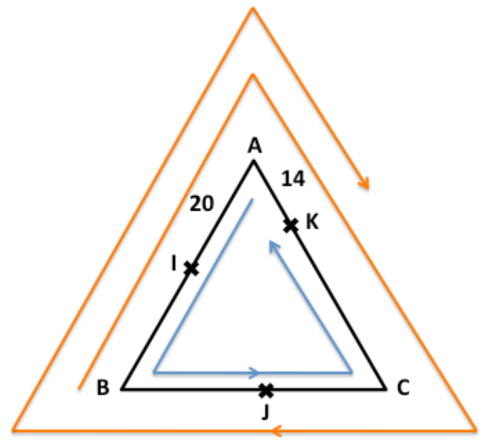
- Il y a 2 réponses, **2** ou **3**

Jour 1 – Problème 12 – Les ferrys

- La première fois qu'ils se croisent, les deux ferrys ont parcouru au total 1 côté c du triangle



- La troisième fois qu'ils se croisent, les deux ferrys ont parcouru au total 7 côtés c du triangle
- La distance parcourue par chacun d'eux a été multipliée par 7 (vitesses constantes)



- Pour le premier ferry Abc
  7x20 = 3c – 14 donne 3c = **154** milles marins
- La réponse est unique

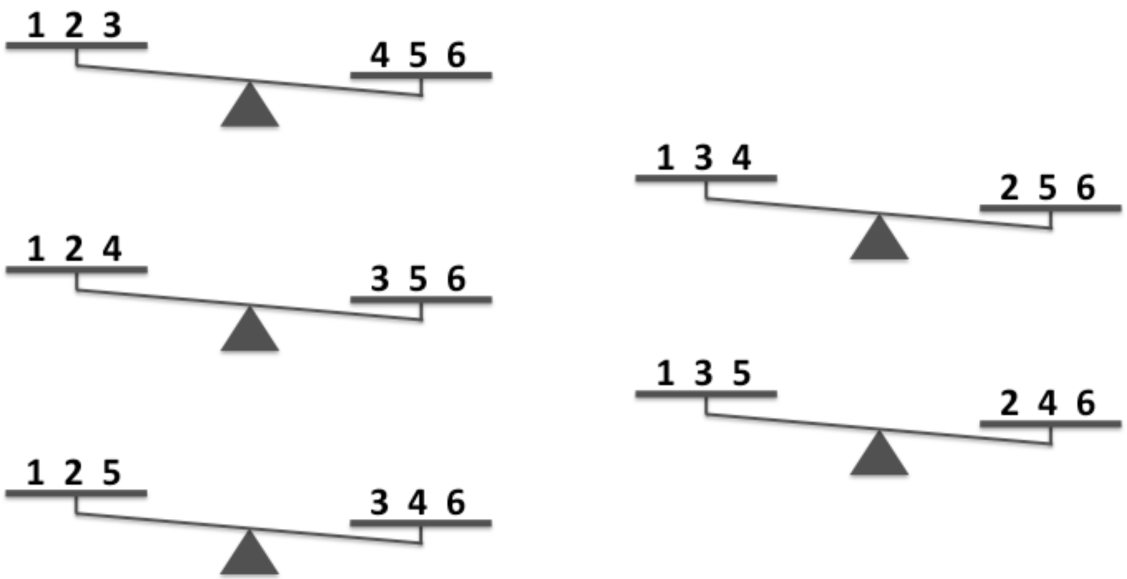
- *4x20 = c + BJ donne BJ = 86/3*

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 13 – Les pesées

- Nous dénombrons 10 façons de placer la masse numérotée 1 avec deux autres masses sur le même plateau
- Elles identifient une pesée

- Nous écartons du raisonnement les **5 déséquilibres forcés**



Jour 1 – Problème 13 – Les pesées

- Les 5 autres façons de placer la masse numérotée 1 avec deux autres masses sur le même plateau obéissent à **deux relations d'ordre**

1 2 6 < 1 3 6 < 1 4 6 < 1 5 6

1 4 5 < 1 4 6

- Si **1 2 6** est la première pesée et qu'elle plus légère (que 3 4 5 sur l'autre plateau), alors il reste quatre choix (1 2 6 < 2 3 6 complément de 1 4 5) et nous ne pourrons pas réussir en deux autres pesées
- Si **1 4 5** est la première pesée et qu'elle plus légère, idem (1 4 5 < 3 4 5 complément de 1 2 6, 1 4 5 < 2 4 5 complément de 1 3 6)
- Si **1 5 6** est la première pesée et qu'elle plus lourde, idem

Jour 1 – Problème 13 – Les pesées

1 2 6 < 1 3 6 < 1 4 6 < 1 5 6

1 4 5 < 1 4 6

- Si **1 3 6** est la première pesée et qu'elle plus légère, alors la deuxième pesée sera **1 4 6** puis, s'il n'y a pas équilibre, selon qu'elle est plus légère ou plus lourde, la troisième pesée sera respectivement **1 5 6** ou **1 4 5**
- Si **1 3 6** est la première pesée et que l'équilibre est obtenu, alors la première pesée a suffi
- Si **1 3 6** est la première pesée et qu'elle est plus lourde, alors la deuxième pesée permettra de réussir avec **1 2 6**

Jour 1 – Problème 13 – Les pesées

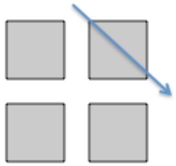
1 2 6 < 1 3 6 < 1 4 6 < 1 5 6

1 4 5 < 1 4 6

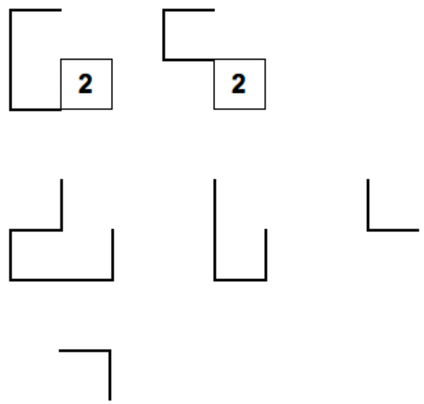
- Si **1 4 6** est la première pesée et qu'elle plus lourde, alors la deuxième pesée sera **1 3 6** puis, s'il n'y a pas équilibre, selon qu'elle est plus légère ou plus lourde, la troisième pesée sera respectivement **1 4 5** ou **1 2 6**
- Si **1 4 6** est la première pesée et que l'équilibre est obtenu, alors la première pesée a suffi
- Si **1 4 6** est la première pesée et qu'elle est plus légère, alors la deuxième pesée permettra de réussir avec **1 5 6**

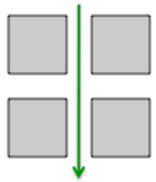
- Il y a 2 réponses, **3, 6** ou **4, 6**

Jour 1 – Problème 14 – La taupinière

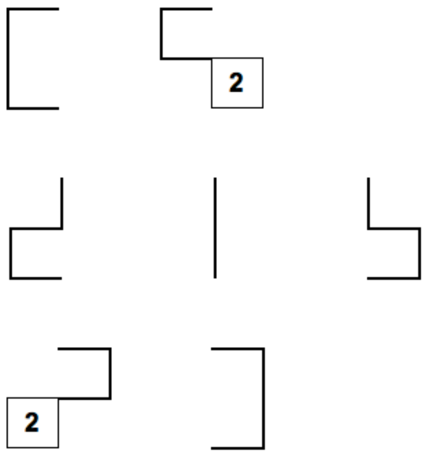


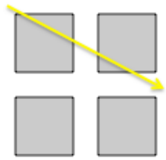
- 8 trajets



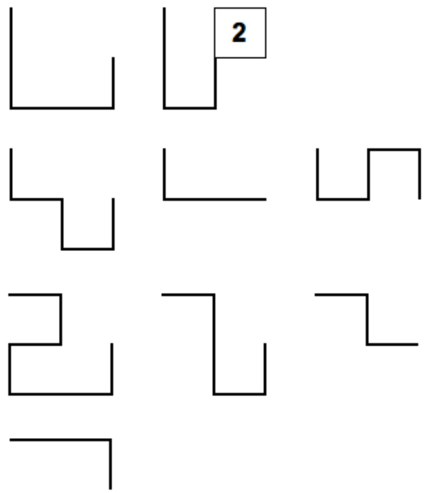


- 9 trajets



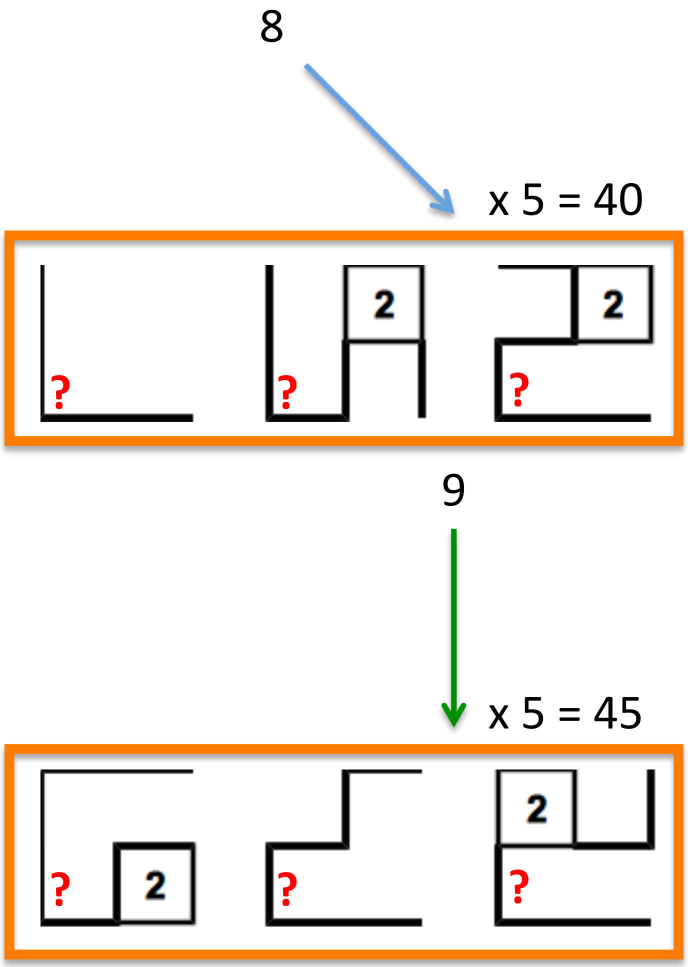


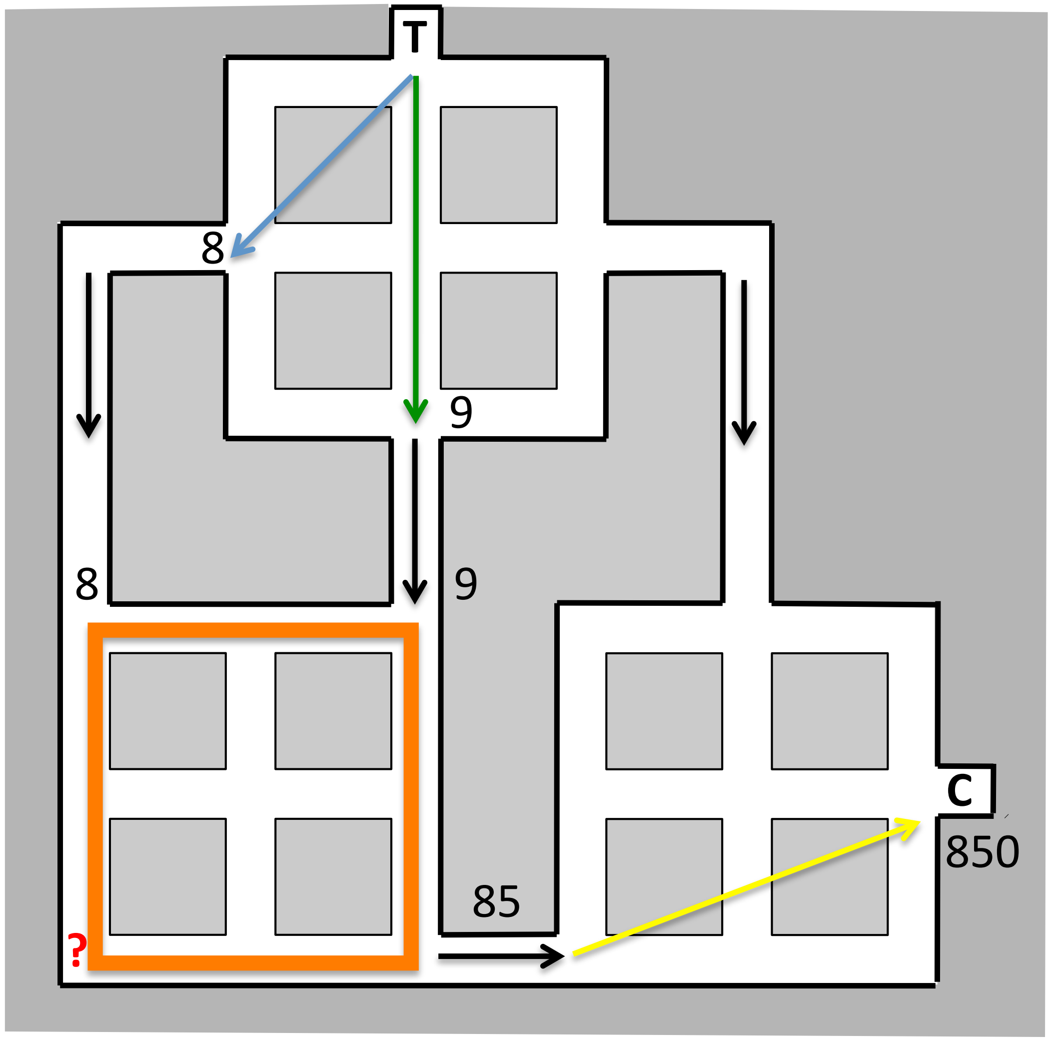
- 10 trajets



FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

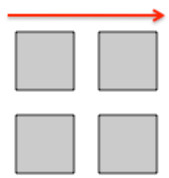
Jour 1 – Problème 14 – La taupinière



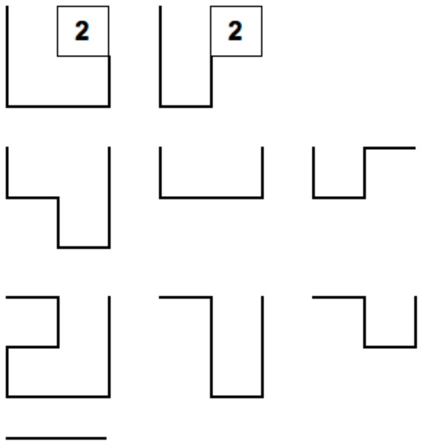


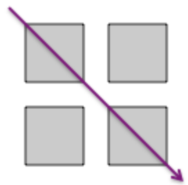
- La réponse est **850**

Jour 1 – Problème 14 – La taupinière

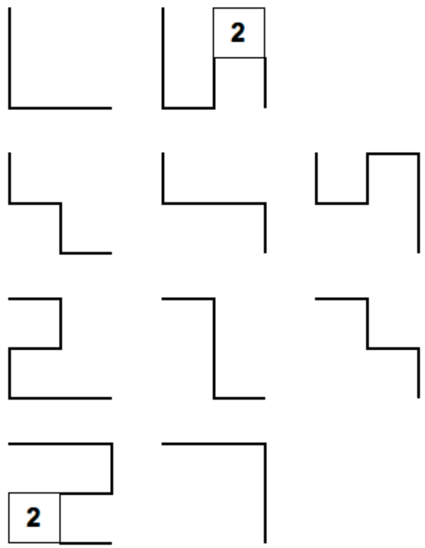


- 11 trajets



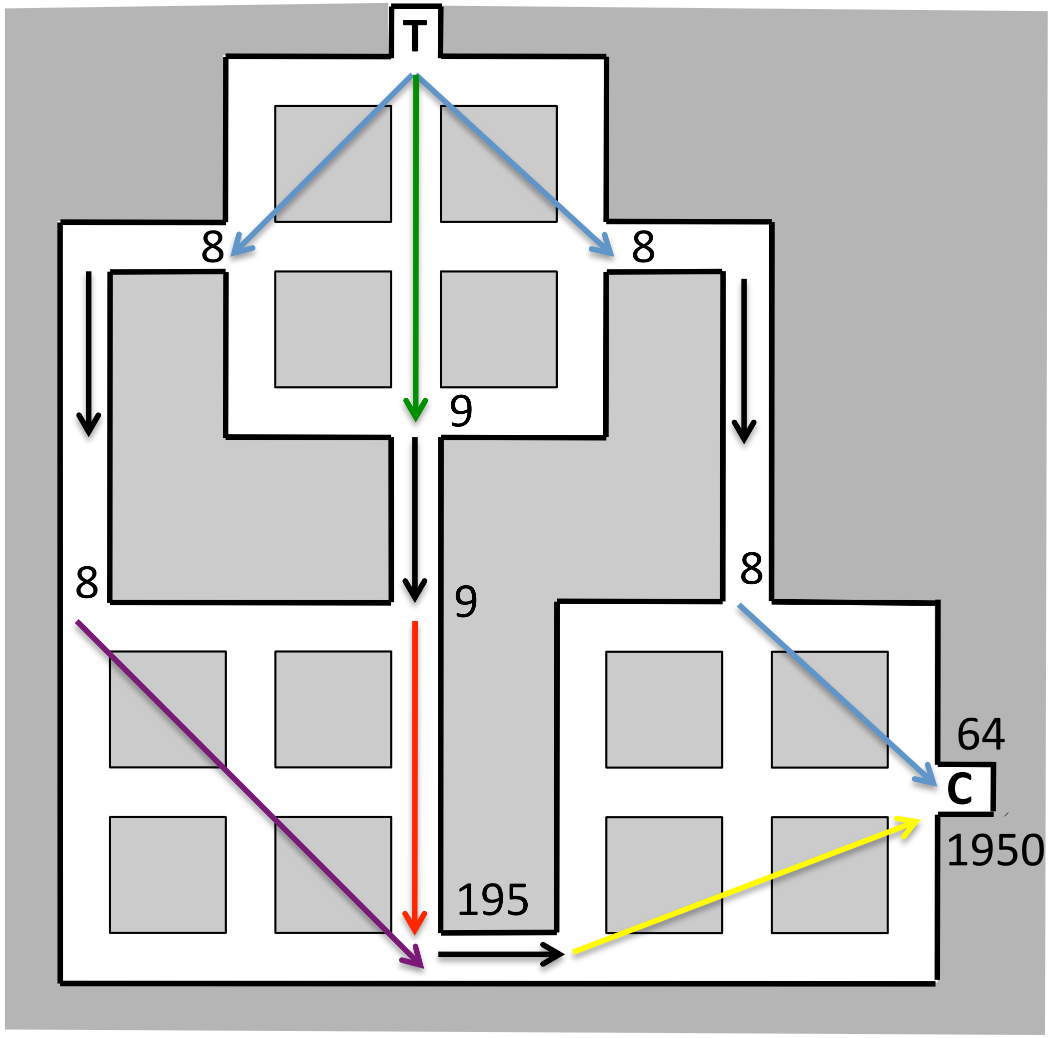


- 12 trajets



Jour 1 – Problème 14 – La taupinière

- *(8 x 12) + (9 x 11) = 195*
- *Nous vérifions qu'il y a 64 + 1950 = 2014 parcours de C à T qui ne passent jamais deux fois par la même galerie ni par le même carrefour*



Jour 1 – Problème 15 – Les nombres du bonheur

- Soit x l'exposant d'un facteur premier de la décomposition du nombre
- $(x + 1)$ est un facteur du produit de ses diviseurs
- $(3x + 1)$ est un facteur du produit des diviseurs de son cube

- Il doit y avoir un exposant a tel que $(3a + 1)$ soit divisible par 13
- **a** est de la forme **$(13k + 4)$** où $0 \leq k$

- $(3a + 1) (3b + 1) (3c + 1)\ldots = 13 (a + 1) (b + 1) (c + 1)\ldots$

- **$(13k + 5)/(3k + 1) = ((3b + 1)/(b + 1)) ((3c + 1)/(c + 1))\ldots$**

Jour 1 – Problème 15 – Les nombres du bonheur

- **$(13k + 5)/(3k + 1) = ((3b + 1)/(b + 1))\ ((3c + 1)/(c + 1))\ldots$**

- **$13/3$** $< (13k + 5)/(3k + 1) \leq$ **5** pour $0 \leq k$
- $2 \leq (3x + 1)/(x + 1) < 3$ pour $1 \leq x = b, c\ldots$

- $3 <$ **$13/3$** donc il y a au moins deux exposants autres que a
- **5** $< 8 = 2^3$ donc il y en a au plus deux, soit exactement deux

- Si $2 \leq b$ et $2 \leq c$, alors $49/9 = (7/3)^2 \leq ((3b + 1)/(b + 1))\ ((3c + 1)/(c + 1))$
- D'où une contradiction car $5 < 49/9$
- Par exemple, **$b = 1$**

Jour 1 – Problème 15 – Les nombres du bonheur

- **$(13k + 5)/(3k + 1) = 2\ (3c + 1)/(c + 1)$**
- $(13k + 5)(c + 1) = 2(3k + 1)(3c + 1)$
- $7k + 3 = 5kc + c$
- $c - 1 = 2(k + 1)/(5k + 1)$

- Si $1 \leq k$, alors $2/5 < (c – 1) \leq 2/3$, ce qui est impossible (c est entier)
- **$k = 0$**, **$a = 4$**, **$c = 3$**

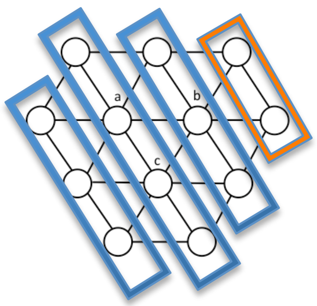
- L'unique réponse est $(a + 1)\ (b + 1)\ (c + 1) = 5 \times 2 \times 4 =$ **40**

- *Le nombre est de la forme $P^4\ Q\ R^3$ qui possède $5 \times 2 \times 4 = 40$ diviseurs*
- *Nous vérifions que son cube $P^{12}\ Q^3\ R^9$ possède $13 \times 4 \times 10 = 13 \times 40$ diviseurs*

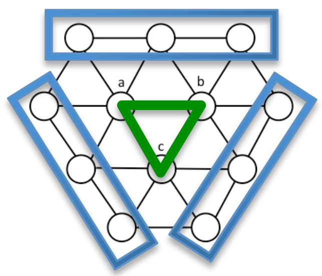
FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 16 – Le diamant magique

- Soient les sommes
  - **S** sur chacun des neuf alignements de trois ou quatre disques
  - **D** sur chaque alignement de deux disques
  - **t** sur les disques a, b et c
  - **T** sur les trois disques au milieu d'un côté
  - Σ sur les 11 disques

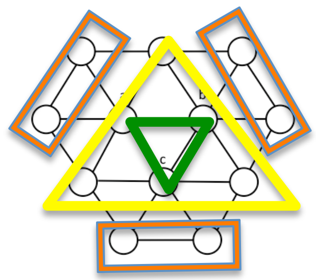


$\Sigma = 3S + D$



$t = \Sigma - 3S$

$t = D$

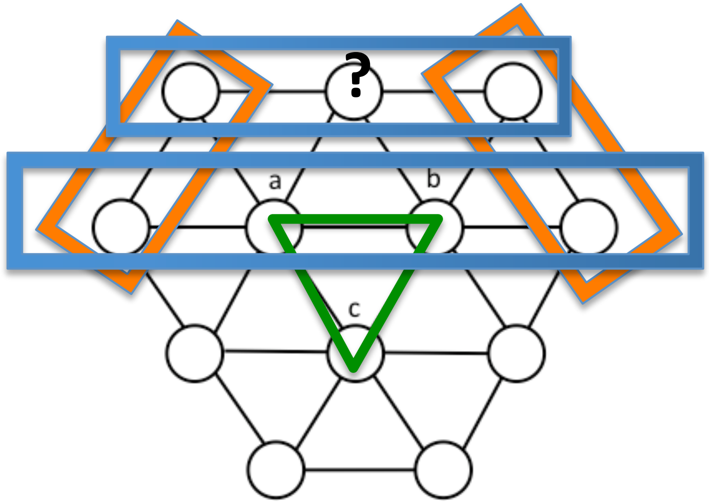


$T = \Sigma - 3D - t$

$T = 3(S - D)$

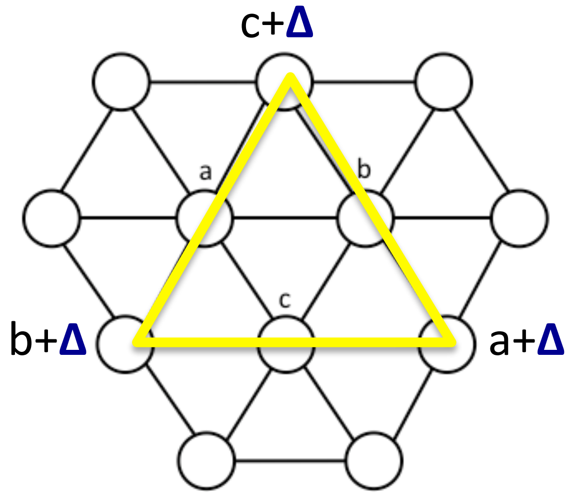
Jour 1 – Problème 16 – Le diamant magique

- $2S = 2D + ? + a + b = 2D + ? + t - c$
- $? - c = \Delta = (2S - 3D)$



- Ceci vaut quelle que soit l'orientation
- $3(S - D) = T = t + 3\Delta$ donne $3S = 5D$

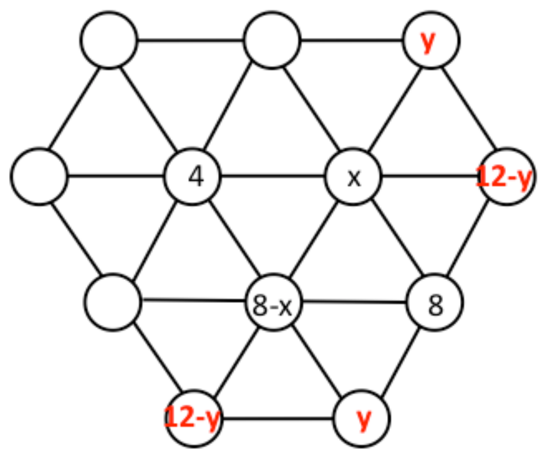
- $\Sigma = 18\Delta$, $S = 5\Delta$, $t = D = 3\Delta$, $T = 6\Delta$



- La somme des nombres de 0 à 14 est 105
- $\Delta = 4$ donne la plus petite somme S à tester
- $\Sigma = 72$, $S = 20$, $t = D = 12$, $T = 24$
- Les trois nombres non utilisés totalisent 33

Jour 1 – Problème 16 – Le diamant magique

- **Si a, b et c n'ont pas leur complément à 12 au centre**
- Le complément à 12 de l'un d'eux n'est pas sur un côté de deux (**D** = 12)
- Il y a le complément à 12 de l'un d'eux, x, au milieu d'un côté de trois, sinon les trois nombres non utilisés totaliseraient (3x12) – **t** = 24 et non 33
- Il y a le complément à 12 - **Δ** = 8 de x au centre, et enfin 4 (**t** = 12)
- D'où une **contradiction** car **y** (ou **12-y**) est doublé



Jour 1 – Problème 16 – Le diamant magique

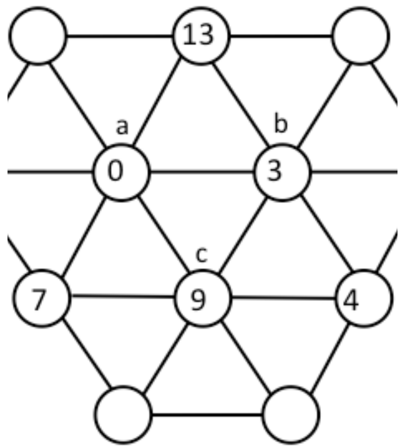
- **S'il y a 6 au centre**
- Il n'y a pas 4 au centre (voir précédemment)
- Il y a 1 et 5 au centre (**t** = 12)
- D'où une **contradiction** car (1 + **Δ**) = **5** est doublé au milieu d'un côté de trois

- **Il y a 0 au centre**

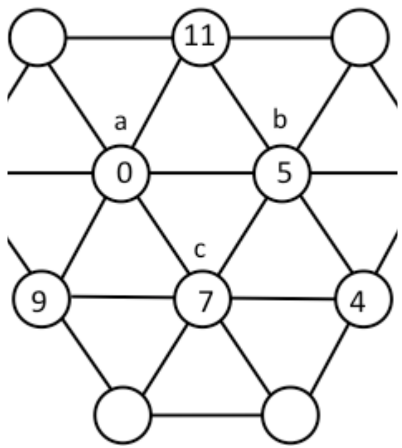
- Il n'y a pas 4 au centre (voir précédemment)
- Il n'y a pas 11 au centre car il y aurait 11 + **Δ** = 15 au milieu d'un côté de trois
- Les **deux nombres** qui **totalisent 12** au centre sont (2, 10), (3,9) ou (5, 7)
- **Trois cas** sont à étudier

Jour 1 – Problème 16 – Le diamant magique

- **t** = 12 ne peut pas être obtenu avec (9,3,0) car au moins quatre nombres 14, 12, 8, 6… ne seraient pas utilisés (**D** = 12)

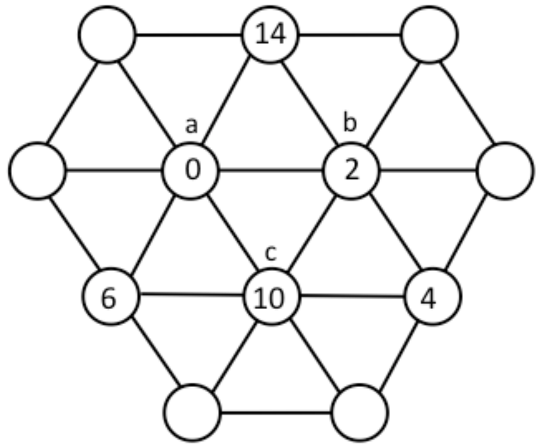


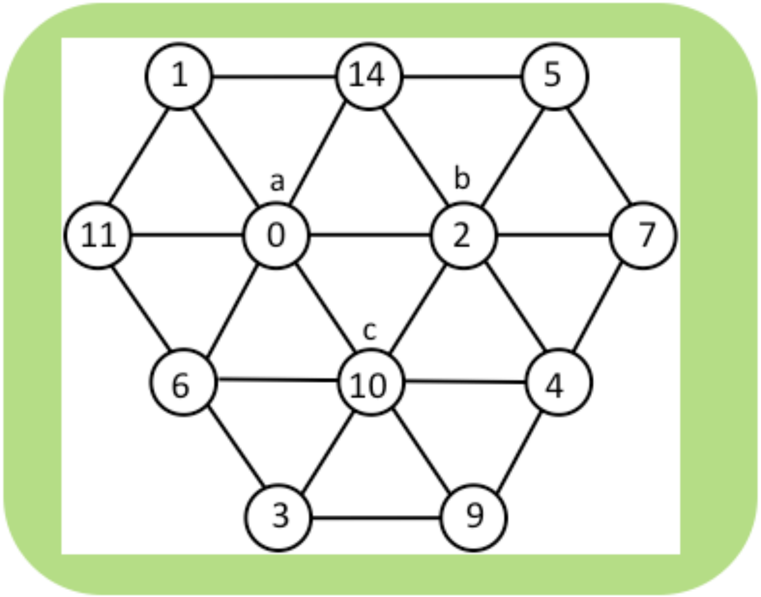
- **t** = 12 ne peut pas être obtenu avec (7,5,0) car au moins quatre nombres 14, 13, 12, 8… ne seraient pas utilisés (**D** = 12)



Jour 1 – Problème 16 – Le diamant magique

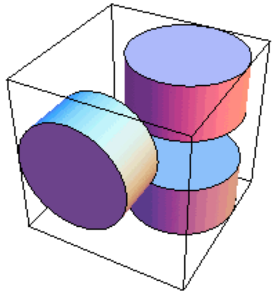
- **t** = 12 est obtenu avec (10,2,0)
- **D** = 12 est obtenu avec (1,11), (3,9) et (5,7)
- 13, 12 et 8 ne sont pas utilisés
- 1 et 5 complètent 14 (**S** = 20)
- Pour qu'il ne soit pas doublé, 5 n'est pas aligné avec 0 et 10
- Nous obtenons l'unique réponse



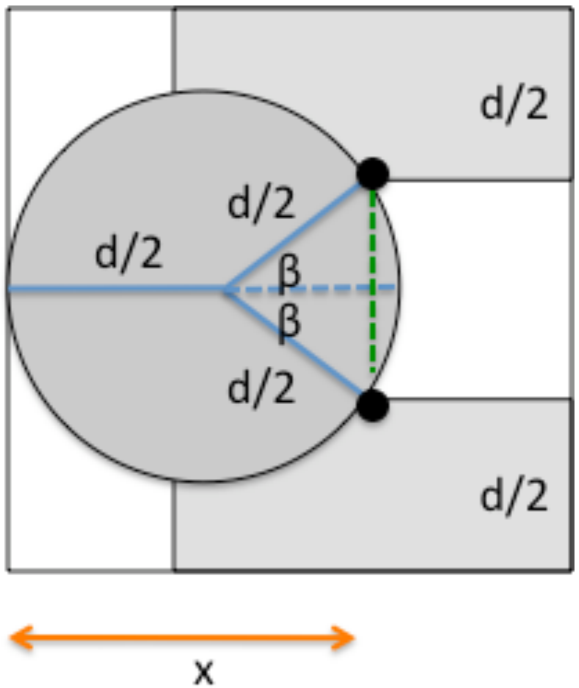


Jour 1 – Problème 17 – Les boites de thon

- Soit c le côté du premier cube
  et d le diamètre d'un cylindre



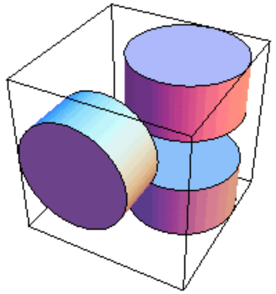
- **Vu de face**



- $d/2 + d/2 \cos\beta = x$
- $d/2 + d/2 \sin\beta = c/2$

- Nous éliminons β par $\cos^2 + \sin^2 = 1$
- $(2x - d)^2 + (c - d)^2 = d^2$ **(1)**

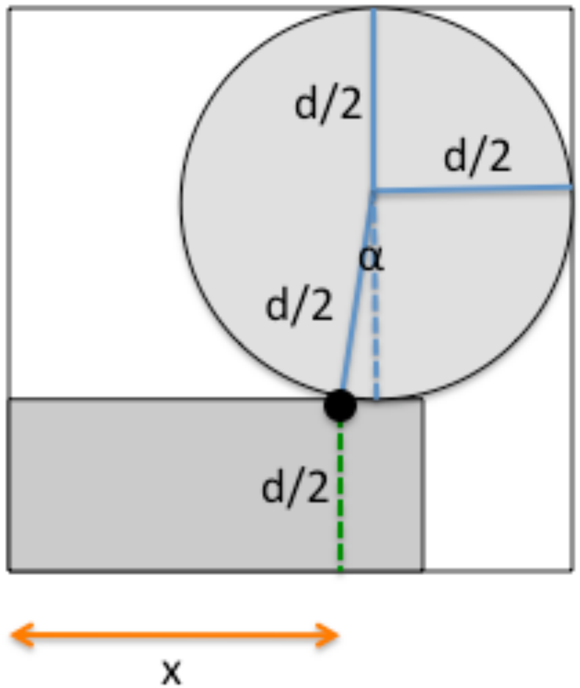
Jour 1 – Problème 17 – Les boites de thon



- **<u>Vu de dessus</u>**

- $x + d/2 \sin\alpha + d/2 = c$
- $d/2 + d/2 \cos\alpha + d/2 = c$

- Nous éliminons α par $\cos^2 + \sin^2 = 1$
- $(2c - 2x - d)^2 + 4(c - d)^2 = d^2$ **(2)**



FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

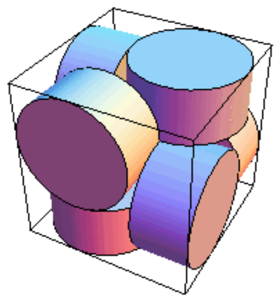
Jour 1 – Problème 17 – Les boites de thon

- $(2c - 2x - d)^2 + 4(c - d)^2 = d^2$ **(2)**
- $(2x - d)^2 + (c - d)^2 = d^2$ **(1)**

- Trivialement, $(2c - 2x - d) = 2(c - d) - (2x - d)$
- **(2)** moins **(1)** donne $4(2x - d) = 7(c - d)$

- Nous reportons cette valeur de $(2x - d)$ dans **(1)**
- $65(c - d)^2 = 16d^2$ donne **$c = ((65 + 4\sqrt{65})/65)d$**

- Le côté du second cube est $3d/2$
- **c** $+ 1 = 3d/2$ donne $d = 130 + 16\sqrt{65}$
- $\sqrt{65} \approx 8{,}062$ donne $d \approx 258{,}992$ et la réponse **259** millimètres

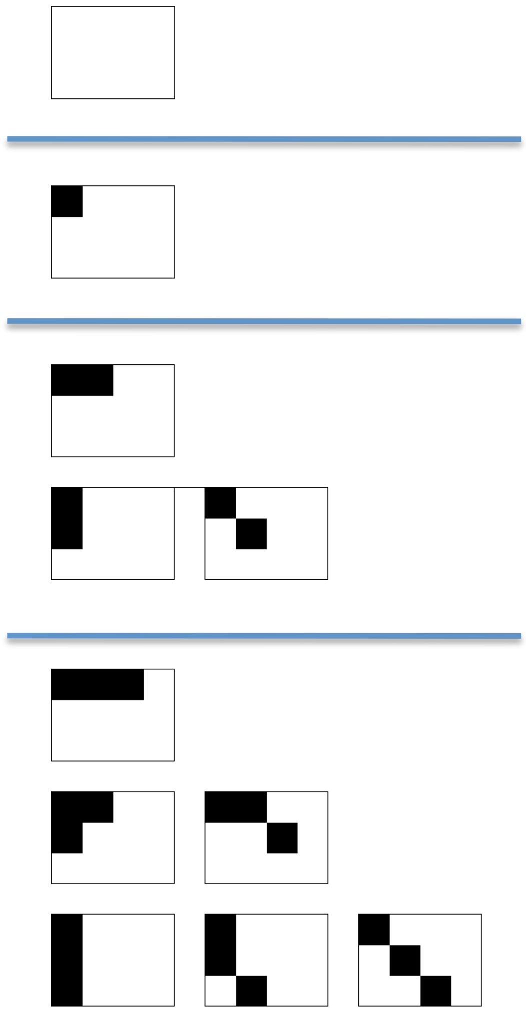


Jour 1 – Problème 18 – Les mires de télévision

Première méthode

- Nous dénombrons en fonction des nombres de cases noires sur la grille, puis des nombres de cases noires par ligne rangés dans l'ordre décroissant de haut en bas, et enfin des nombres de cases par colonne (attention aux doubles !)

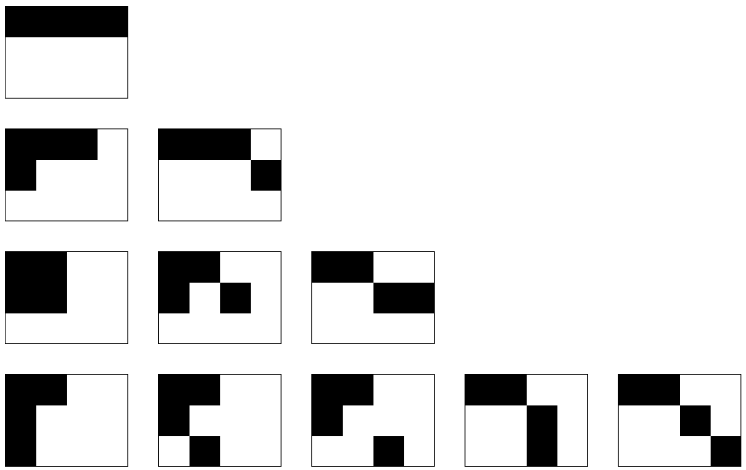
- 0 case noire sur la grille, **1** mire de télévision
- 1 case noire, **1** mire
- 2 cases noires sur la grille, **3** mires de télévision
- 3 cases noires, **6** mires



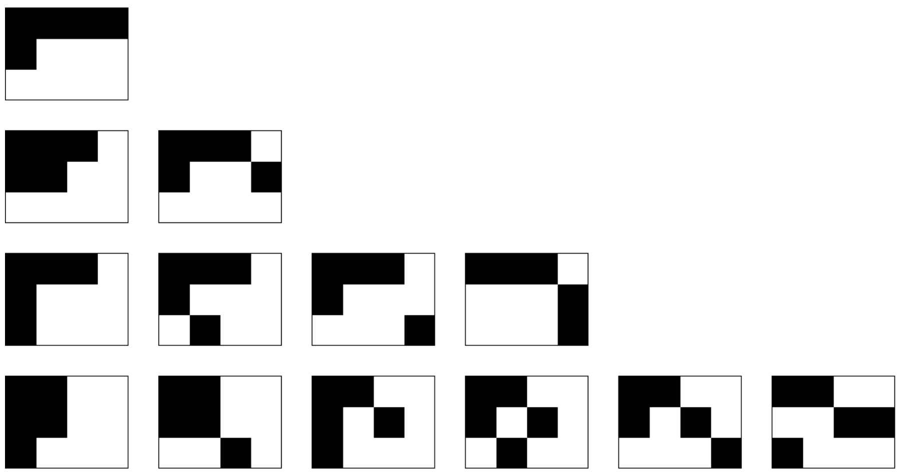
FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 18 – Les mires de télévision

- 4 cases noires sur la grille, **11** mires de télévision



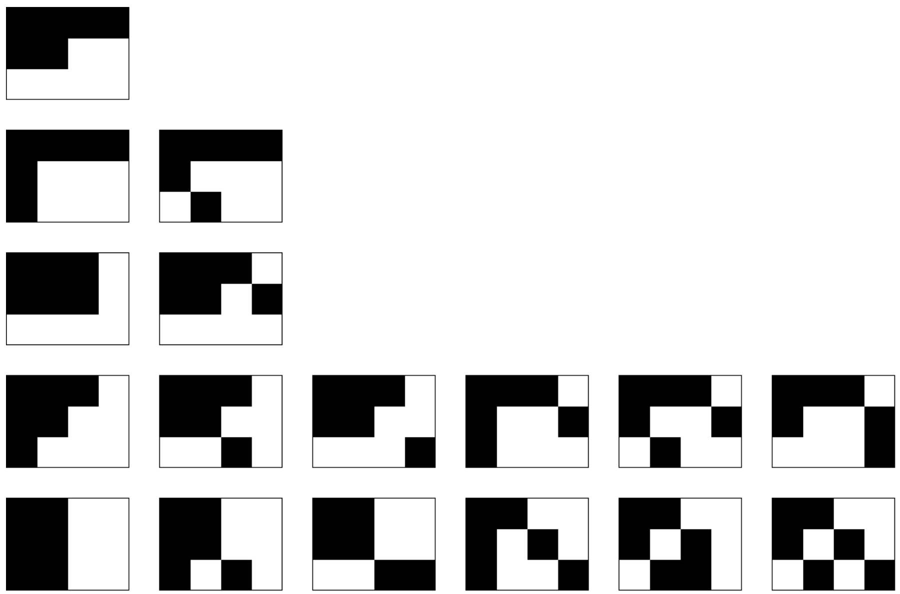
- 5 cases noires sur la grille, **13** mires de télévision



FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 18 – Les mires de télévision

- 6 cases noires sur la grille, **17** mires de télévision



- De 7 à 12 cases noires sur la grille, en échangeant noir et blanc, nous comptons autant de mires que pour le nombre complément à 12
- La réponse est (2 x (**1** + **1** + **3** + **6** + **11** + **13**)) + **17** = **87** mires

Jour 1 – Problème 18 – Les mires de télévision

Seconde méthode

- Nous appliquons le théorème de Polya (Burnside)
  sur le groupe des permutations des lignes et des colonnes de la grille 3 x 4

Nombre d'orbites	Identité sur les 4 colonnes	2 colonnes fixes & échange de 2 colonnes	1 colonne fixe & translation de 3 colonnes	Deux échanges de 2 colonnes	Autres permutations (dont translation des 4 colonnes)	
Identité sur les 3 lignes	12	9	6	6	3	1 permutation
Echange de 2 lignes	8	7	4	6	3	3 permutations
Translation des 3 lignes	4	3	4	2	1	2 permutations
	1 permutation	6 permutations	8 permutations	3 permutations	6 permutations	

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 18 – Les mires de télévision

- Nous calculons la moyenne pondérée, sur les permutations, des **2**$^{\text{nombre d'orbites}}$ (**2** couleurs)

1×2^{12}	6×2^{9}	8×2^{6}	3×2^{6}	6×2^{3}	1
3×2^{8}	18×2^{7}	24×2^{4}	9×2^{6}	18×2^{3}	3
2×2^{4}	12×2^{3}	16×2^{4}	6×2^{2}	12×2^{1}	2
1	6	8	3	6	

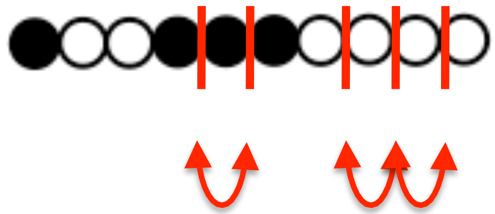
- Nous retrouvons
$(2^{12} + 6 \times 2^{9} + 3 \times 2^{8} + 18 \times 2^{7} + 20 \times 2^{6} + 42 \times 2^{4} + 36 \times 2^{3} + 6 \times 2^{2} + 12 \times 2^{1}) / (6 \times 24)$
$= (2^{9} + 2^{8} + 2^{3} + 2^{2} + 2^{1} + 2^{0}) / 9 = (2^{8} + 2^{2} + 2^{0}) / 3 = 261 / 3 = \mathbf{87}$

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 1 – Le collier

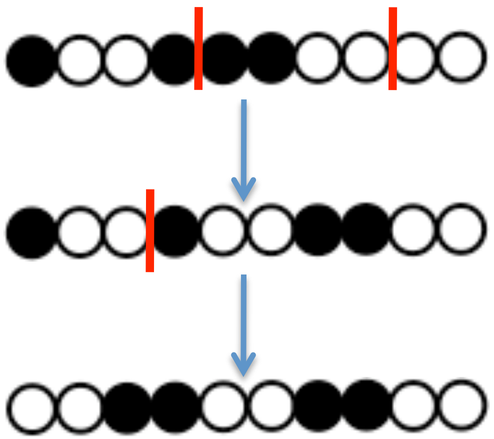
- Nous devons couper le collier **au moins une fois** entre deux des trois perles noires consécutives, **et au moins une fois** entre deux des quatre perles blanches consécutives

- Une seule opération ne suffit pas car la première perle à partir de la gauche reste noire



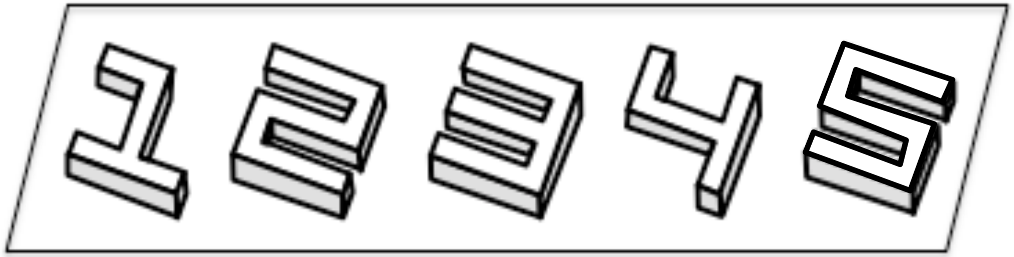
Jour 2 – Problème 1 – Le collier

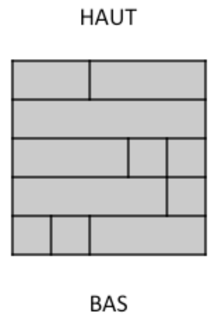
- Sissi peut réussir en **2** opérations au minimum



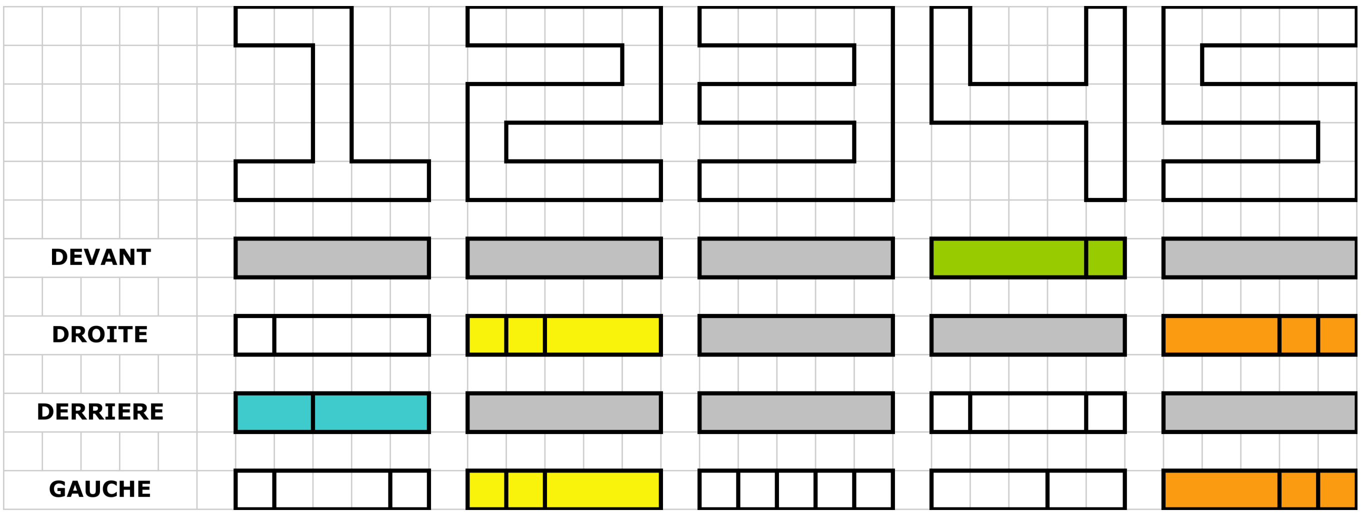
FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 2 – La pile de chiffres





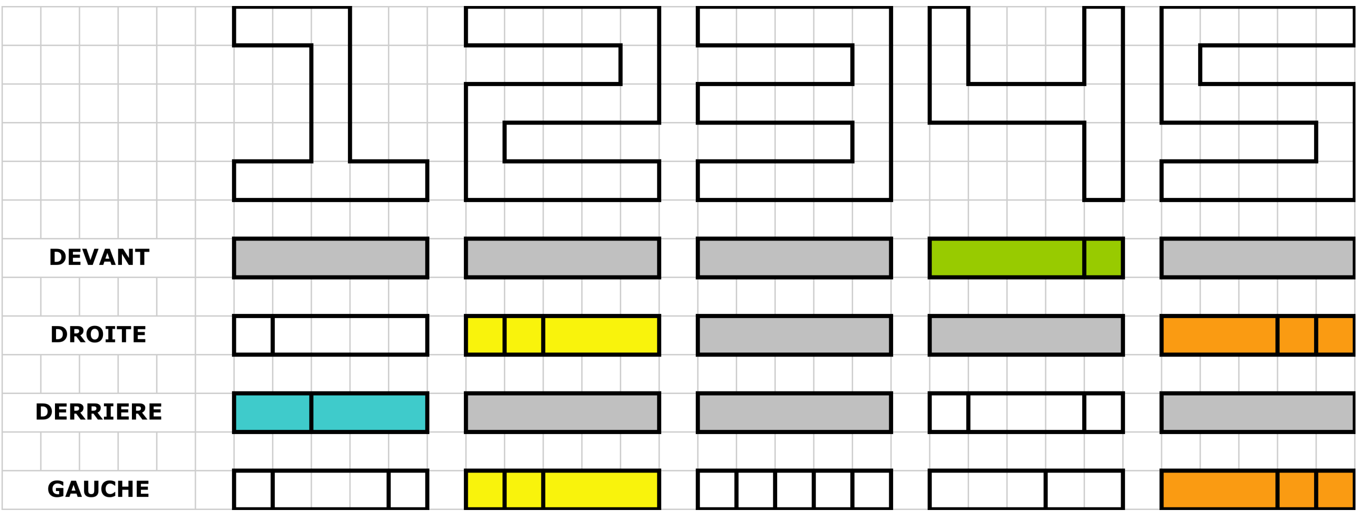
- Après avoir fait une hypothèse d'orientation (devant = pied du chiffre), nous dessinons les vues de chaque chiffre devant, droite, derrière et gauche

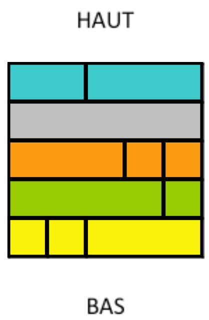


Jour 2 – Problème 2 – La pile de chiffres

- Les premier, deuxième, troisième et cinquième chiffres empilés sont respectivement 2, 4, 5 et 1
- Le quatrième chiffre empilé est celui qui reste, 3
  (de toutes les façons, il ne pouvait pas être vu de gauche)

- L'unique réponse est **2, 4, 5, 3, 1**





Jour 2 – Problème 3 – La rangée de dominos

- Lorsque deux dominos se touchent par un côté, les carrés voisins doivent contenir le même nombre

- Nous cherchons x, y et z

2	0	0	x	x	y	y	z	z	1	1	4

Jour 2 – Problème 3 – La rangée de dominos

- La somme des six nombres doit être la même à gauche et à droite du trait vertical
- Pour combler l'écart de 4, x = z + 2
- z est au plus égal à 2

2	0	0	x	x	y	y	z	z	1	1	4

- Si z = 0, alors x = 2 et le domino 0x double le domino 20
- Si z = 1, alors il y a le domino z1 qui est interdit
- **z = 2** et **x = 4**

Jour 2 – Problème 3 – La rangée de dominos

2	0	0	4	4	y	y	2	2	1	1	4

- Si y = 0, alors le domino 4y double le domino 04
- Si y = 1, alors le domino 4y double le domino 14
- Si y = 2, alors il y a le domino y2 qui est interdit
- Si y = 4, alors il y a le domino 4y qui est interdit
- **y = 3**

- L'unique réponse est

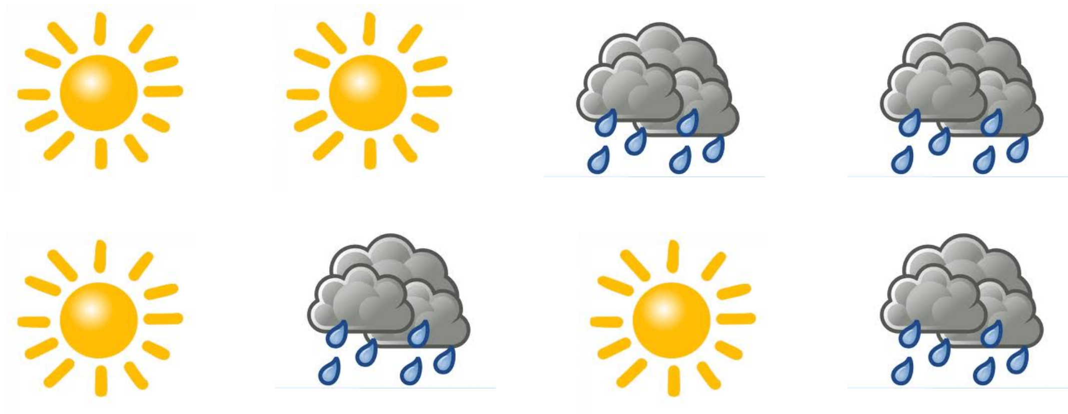
2	0	0	4	4	3	3	2	2	1	1	4

Jour 2 – Problème 4 – Météo de vacances

- Il y a eu 20 après-midi sans pluie

Matin

Après-midi



x **20-x**

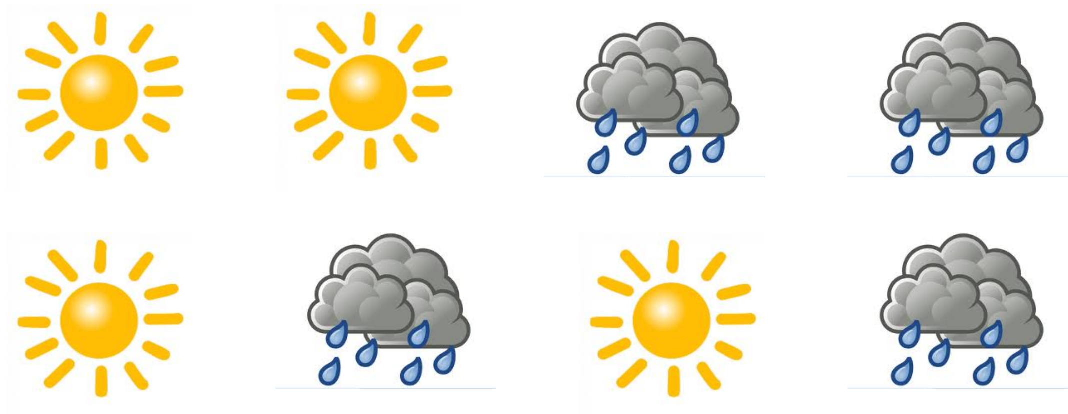
FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 4 – Météo de vacances

- Il y a eu 14 matins sans pluie

Matin

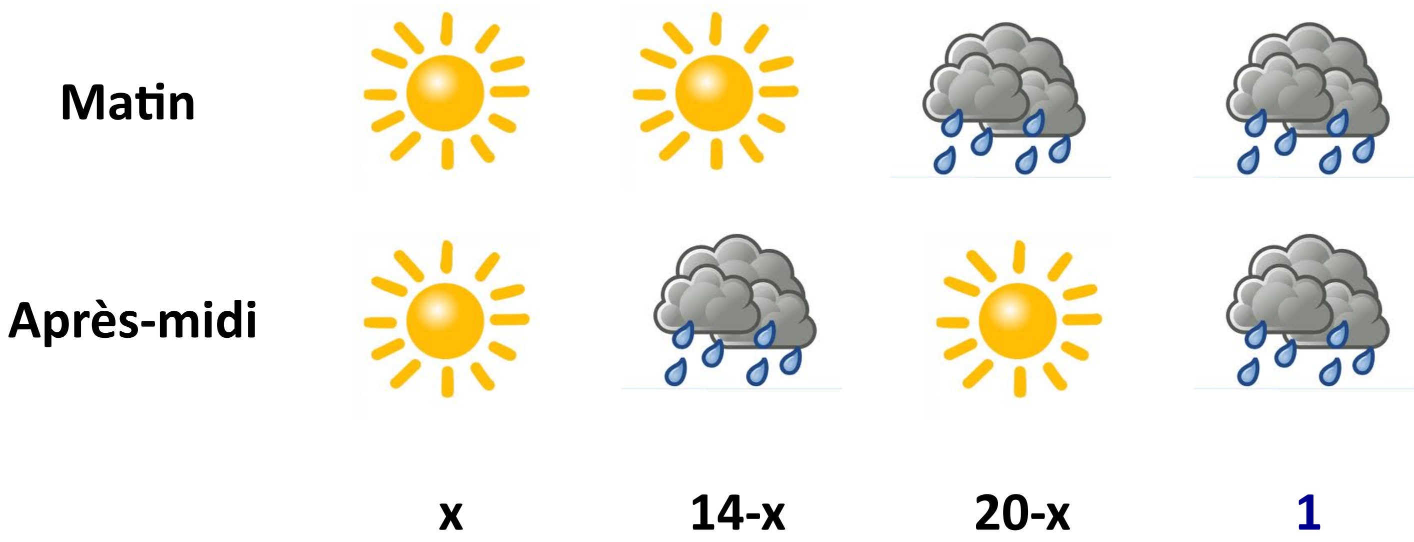
Après-midi



x **14-x** **20-x**

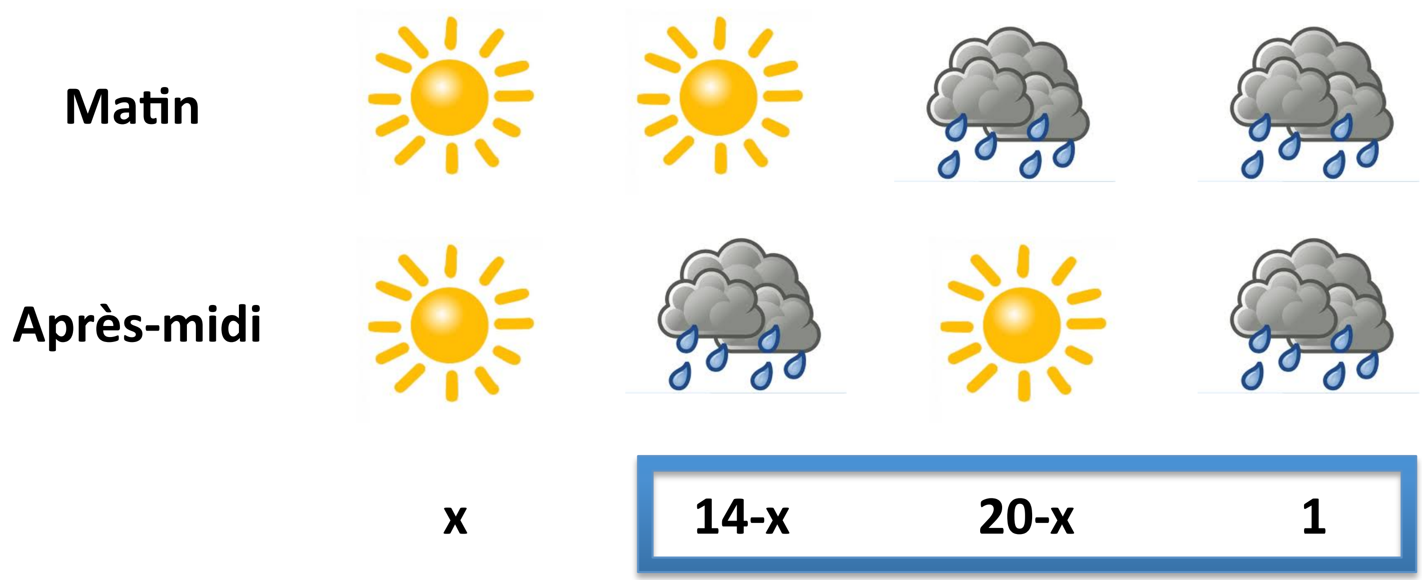
Jour 2 – Problème 4 – Météo de vacances

- Il n'y a qu'un seul jour où il a plu le matin et l'après-midi



Jour 2 – Problème 4 – Météo de vacances

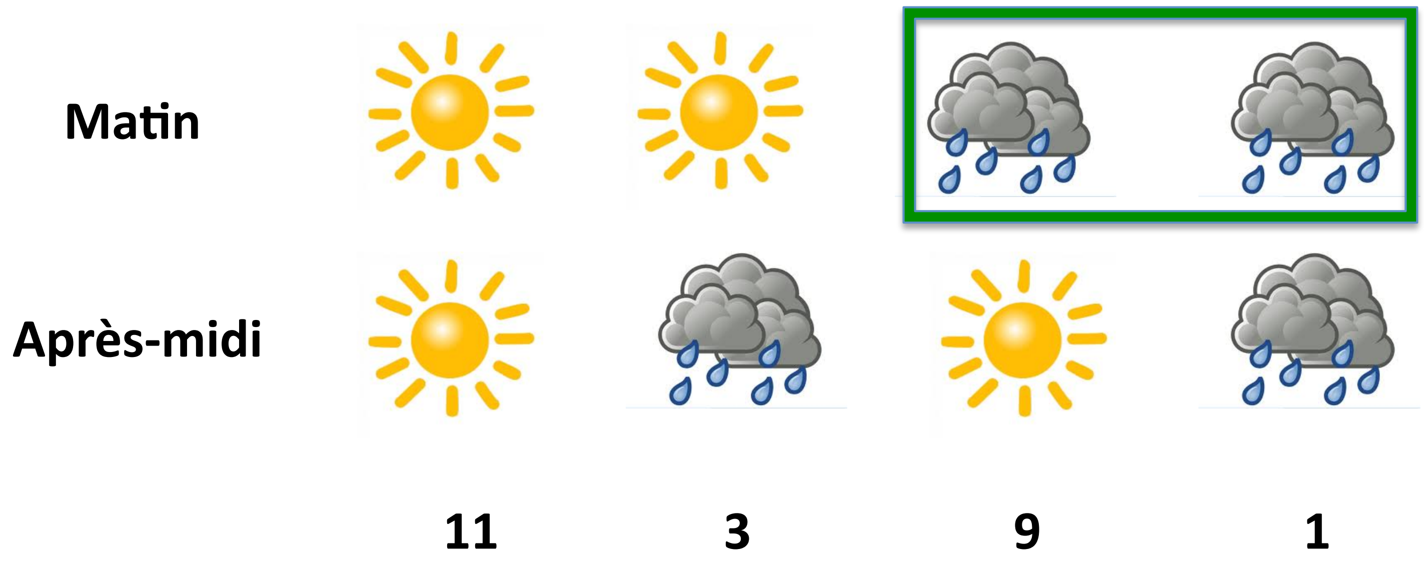
- Dorothée a compté 13 jours où il a plu



- (14-x) + (20-x) + 1 = 13 donne x = 11

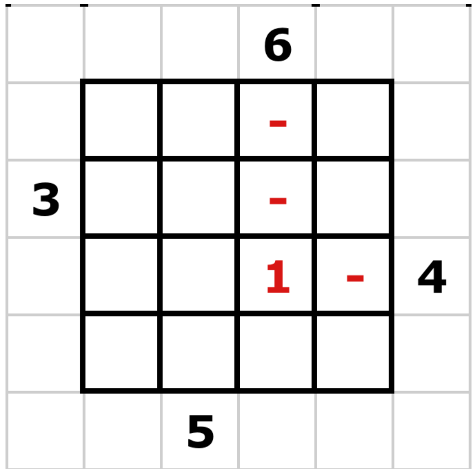
Jour 2 – Problème 4 – Météo de vacances

- L'unique réponse (les matins où il a plu) est 9 + 1 = **10**

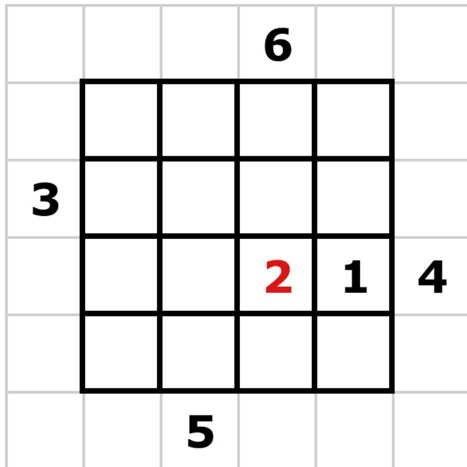


Jour 2 – Problème 5 – Sommes sur grille

- *Si l'indice est 6, alors on voit dans l'ordre 1, 2, 3*
- *Si l'indice est 4, alors on voit dans l'ordre 1, 3, 2*



- Sur la ligne de l'indice 4, le **1** n'est pas dans la deuxième case à partir de la droite car nous ne pourrions pas terminer la colonne de l'indice 6



- Dans la colonne de l'indice 6, le **2** n'est pas sur la ligne de l'indice 4

Jour 2 – Problème 5 – Sommes sur grille

- *Si l'indice est 3, alors on voit dans l'ordre 3, 1, 2 ou 3, 2, 1*

- Sur la ligne de l'indice 3,
  le **3** n'est pas dans la deuxième case à partir de la gauche car le **1** serait doublé dans la dernière colonne à partir de la gauche

			6		
			1		
3	-	3	2	1	
				1	4
		5			

- Nous terminons la ligne de l'indice 3
- Nous plaçons le dernier 1

			6		
			1		
3	3	1	2	-	
				1	4
	1				
		5			

Jour 2 – Problème 5 – Sommes sur grille

- *Si l'indice est 5, alors on voit dans l'ordre 2, 1, 3 ou 2, 3, 1*

- **<u>Si dans la colonne de l'indice 5, on voit dans l'ordre 2, 3, 1</u>**
- Nous terminons la ligne de l'indice 4
- Nous avons terminé la première colonne à partir de la gauche
- Deux cases sont vides sur la première ligne
- D'où une **contradiction**

			6		
		-	1		
3	3	1	2	-	
		3		1	4
	1	2			
		5			

			6		
	-	-	1		
3	3	1	2	-	
	2	3	-	1	4
	1	2			
		5			

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 5 – Sommes sur grille

- **<u>Dans la colonne de l'indice 5, on voit dans l'ordre 2, 1, 3</u>**

- Nous plaçons le 3 dans la colonne de l'indice 5

- Nous plaçons les deux derniers 3

- Nous plaçons les trois derniers 2

- C'est l'unique réponse

			6		
		3	1		
3	3	1	2	-	
			3	1	4
	1			3	
		5			

			6		
	-	3	1	2	
3	3	1	2	-	
	2	-	3	1	4
	1	2	-	3	
		5			

Jour 2 – Problème 6 – Les caméléons

- Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, leurs deux couleurs changent pour la troisième couleur
- A chaque rencontre, les trois nombres de caméléons baissent de **1**, à un multiple de 3 près pour la 3ème couleur

1ère couleur	2ème couleur	3ème couleur
- 1	**- 1**	+ 2 = **- 1** + 3

- Pour que les 44 caméléons puissent être tous de la même couleur à la fin, les nombres de caméléons des deux autres couleurs doivent avoir le même reste de la division par 3 au départ
- Ce sont le bleu et le blanc car 20 et 14 ont le même reste de la division par 3, 2, tandis que 10 a le reste 1

Jour 2 – Problème 6 – Les caméléons

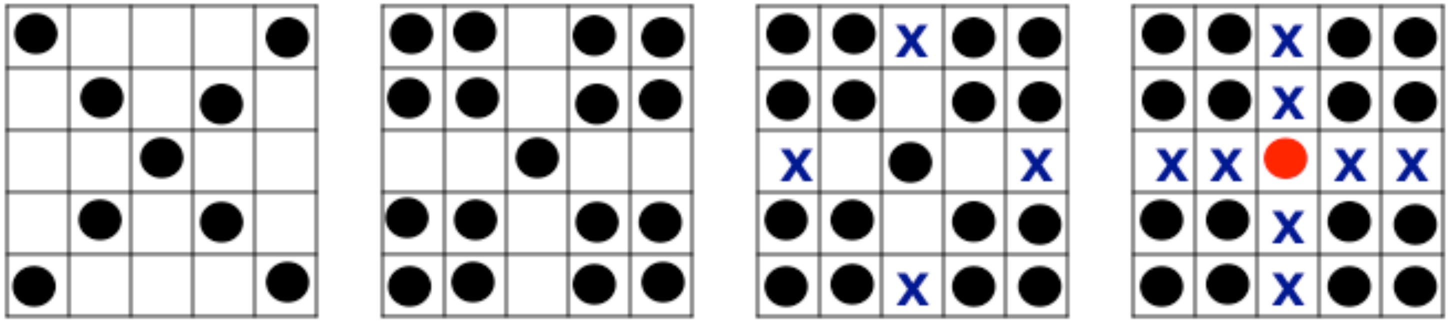
- Il faudra au minimum 20 rencontres pour changer le bleu en rouge
- C’est possible

	Bleu	Blanc	Rouge
	20	14	10
2 rencontres bleu-rouge	20 - 2 = 18	14 + 4 = 18	10 - 2 = 8
18 rencontres bleu-blanc	18 - 18 = 0	18 - 18 = 0	8 + 36 = 44

- La réponse est **20**

Jour 2 – Problème 7 – 2 ou 4

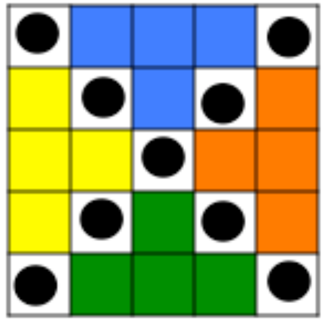
- **<u>Si nous saturons les deux diagonales</u>**
- Chaque case à un sommet de la grille contient un jeton,
  les deux cases voisines contiennent chacune un jeton
- Sur chaque côté, chaque case au milieu est vide à cause des deux cases voisines (entourées de 2 jetons)
- Nous ne pouvons plus placer de jeton sur la grille



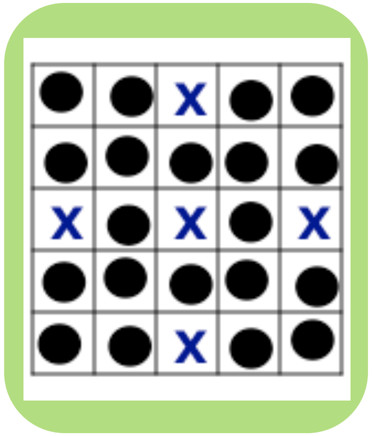
- D'où une **contradiction** sur la case centrale

Jour 2 – Problème 7 – 2 ou 4

- Nous pouvons placer au plus 9 – 1 = 8 jetons sur les deux diagonales
- Si une case au milieu d'un côté de la grille contient un jeton, alors au plus deux des trois cases voisines en contiennent un
- Dans chacun des quatre ensembles de quatre cases de la même couleur sur la figure, nous pouvons placer au plus 3 jetons
- Nous pouvons placer au plus 8 + (4 x 3) = **20** jetons sur la grille

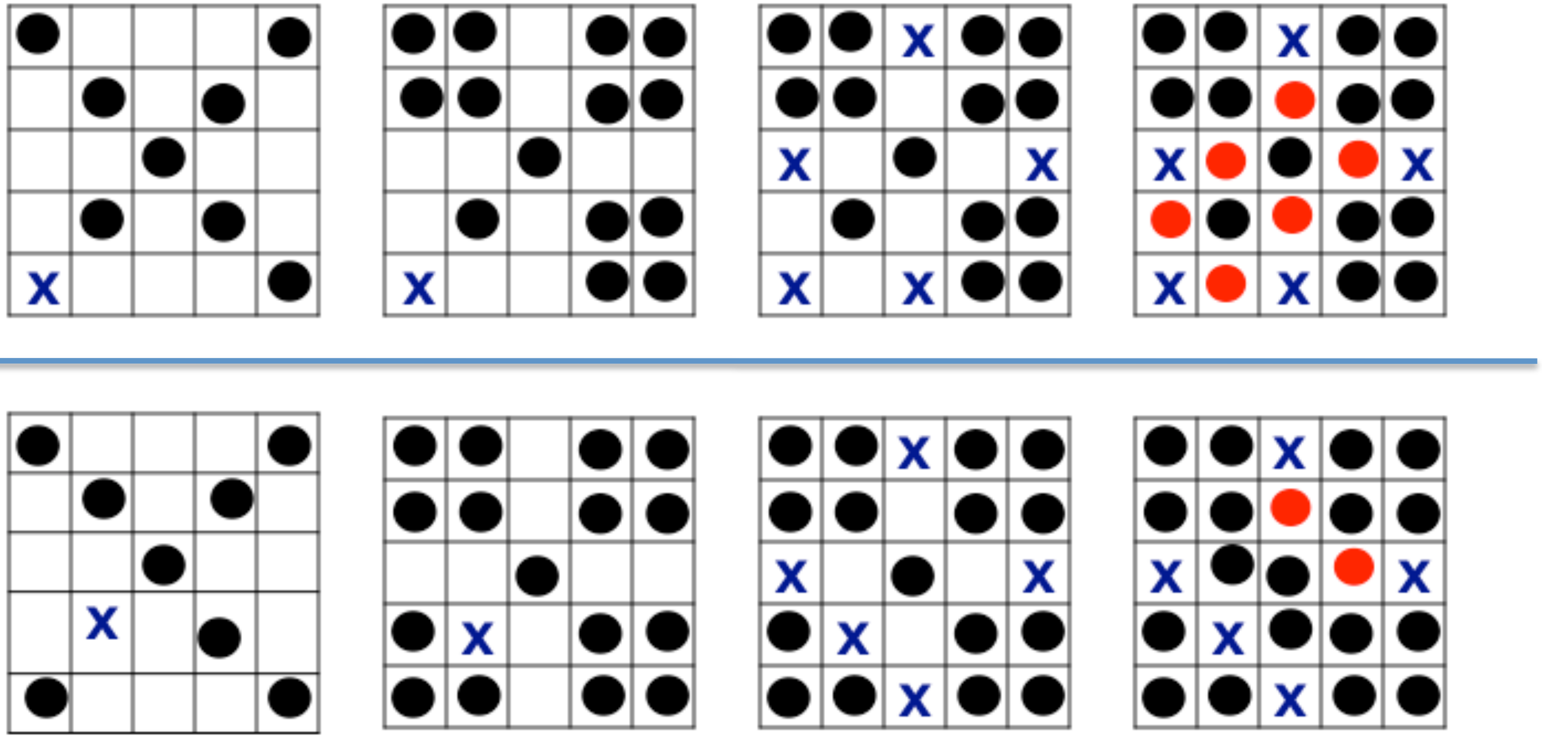


- Ce maximum est atteignable
- *Cela n'est pas demandé à ce niveau de difficulté, nous allons montrer que la grille réponse est unique*



Jour 2 – Problème 7 – 2 ou 4

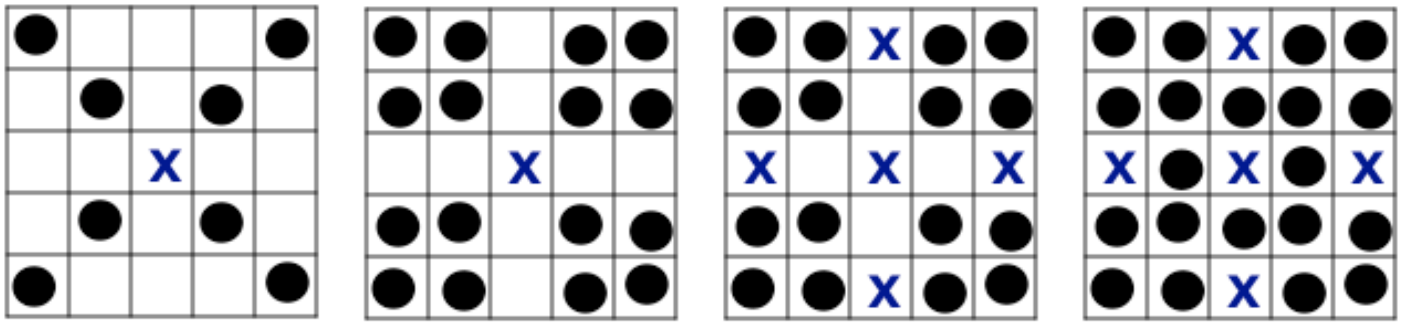
- *Nous devons placer un jeton sur toutes les cases des deux diagonales sauf une*
- ***<u>Si cette case vide n'est pas la case centrale,</u>*** *nous choisissons une orientation (il pourra y avoir plusieurs configurations)*



- *D'où une **contradiction***

Jour 2 – Problème 7 – 2 ou 4

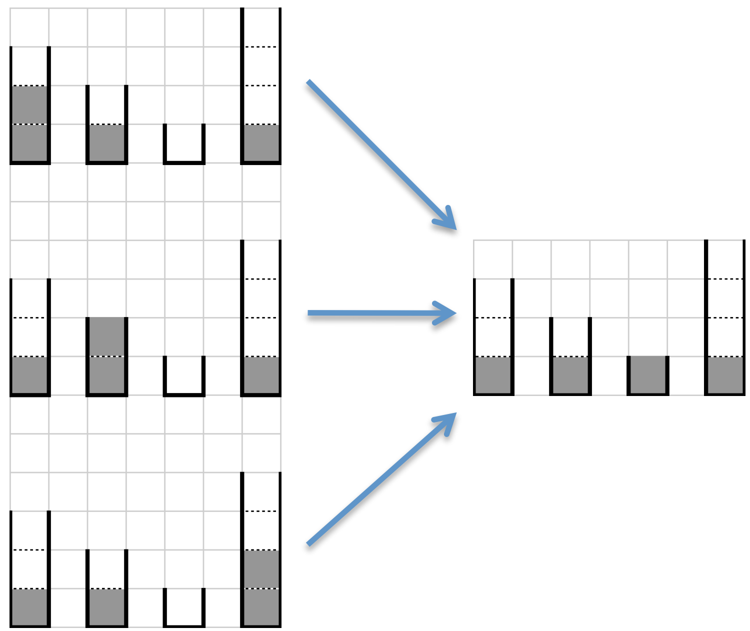
- *Pour placer 20 jetons sur la grille, nous devons placer un jeton sur toutes les cases des deux diagonales sauf la case centrale, et saturer les quatre ensembles colorés*



- *C'est l'unique réponse*

Jour 2 – Problème 8 – Les seaux d'eau

- A la fin, aucun seau n'est vide
- La dernière opération est de vider partiellement un seau
- Et forcément dans le seau (d'une contenance) de 1 litre vide jusqu'à ce que l'eau effleure à ras le bord

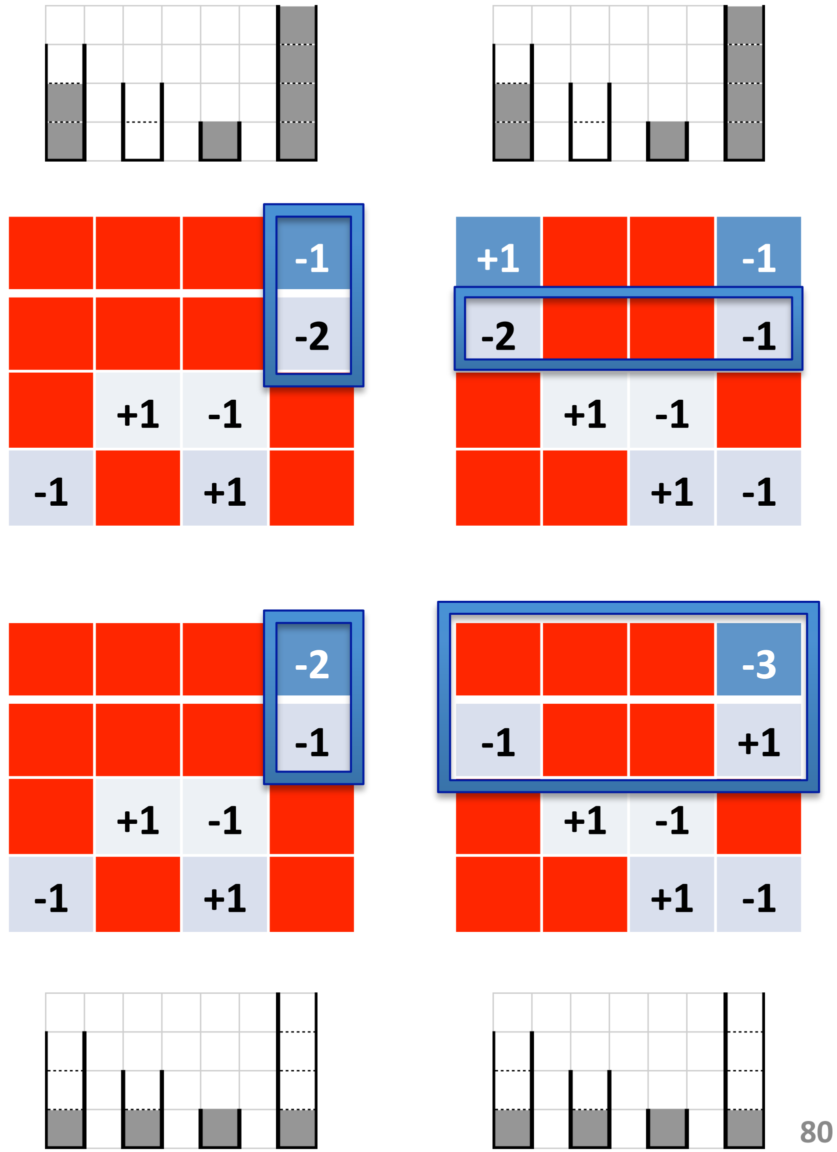


FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 8 – Les seaux d'eau

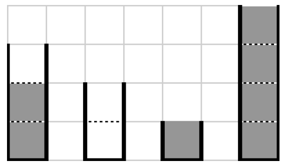
- **<u>Si le seau (d'une contenance) de 4 litres passe de 4 litres à 1 litre en plusieurs opérations</u>**
- On vide au moins deux fois le seau de 4 litres
- On vide au moins une fois le seau de 3 litres
- On vide le seau de 1 litre avant de le remplir (dernière opération)

- Pour ne pas dépasser **quatre** opérations, on ne vide pas le seau de 2 litres, on le remplit de 1 litre, forcément avec le seau de 1 litre
- D'où des **impossibilités**

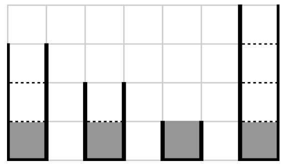


Jour 2 – Problème 8 – Les seaux d'eau

- **<u>Si le seau (d'une contenance) de 4 litres passe de 4 litres à 1 litre en une seule opération</u>**
- On vide une fois le seau de 4 litres, forcément dans le seau de 3 litres vide
- On vide avant et après, donc au moins deux fois, le seau de 3 litres
- On vide le seau de 1 litre
- On remplit de 1 litre, forcément avec le seau de 2 litres, le seau de 1 litre
- **Quatre** opérations sont **insuffisantes**

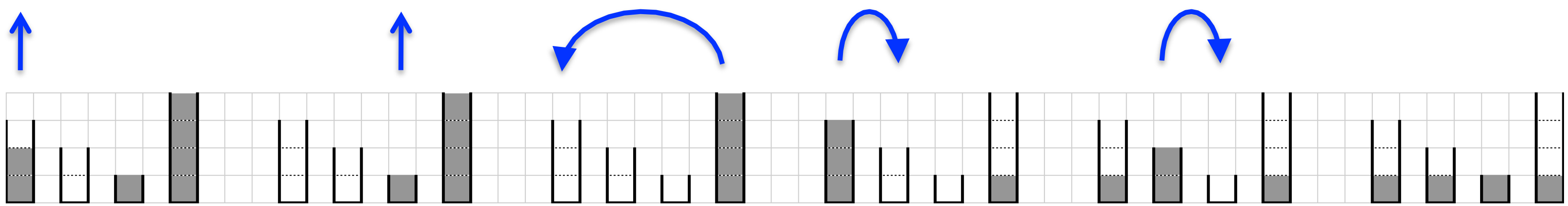


-2	+2		
+3			-3
-2	+2		
		-1	
	-1	+1	



Jour 2 – Problème 8 – Les seaux d'eau

- Voici un exemple simple de **cinq** opérations permettant d'obtenir 1 litre d'eau dans chacun des quatre seaux



- La réponse est **5** opérations au minimum

Jour 2 – Problème 9 – Devine nombre

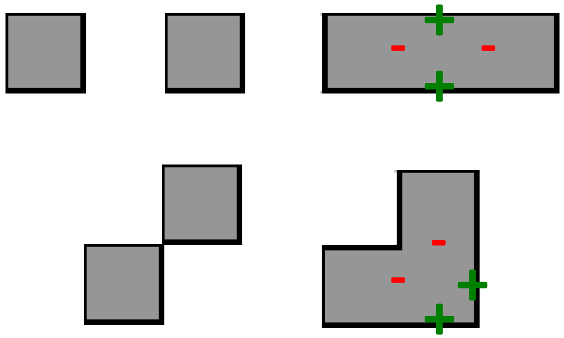
- Le chiffre des unités de 201403, 3, n'est pas pair
- Le chiffre du premier nombre omis pour obtenir le second nombre est celui des unités, u

- Soit 10 N + u le premier nombre, avec $0 \leq u \leq 9$
- Le second nombre est N
- $11\ N + u = 201403 = (11 \times 18309) + 4$
- $11\ (N - 18309) = 4 - u$, avec $-5 \leq (4 - u) \leq 4$

- $(4 - u) = 0$, $u = 4$, $N = 18309$
- Le premier nombre est **183094**.
- C'est l'unique réponse.

Jour 2 – Problème 10 – La contagion

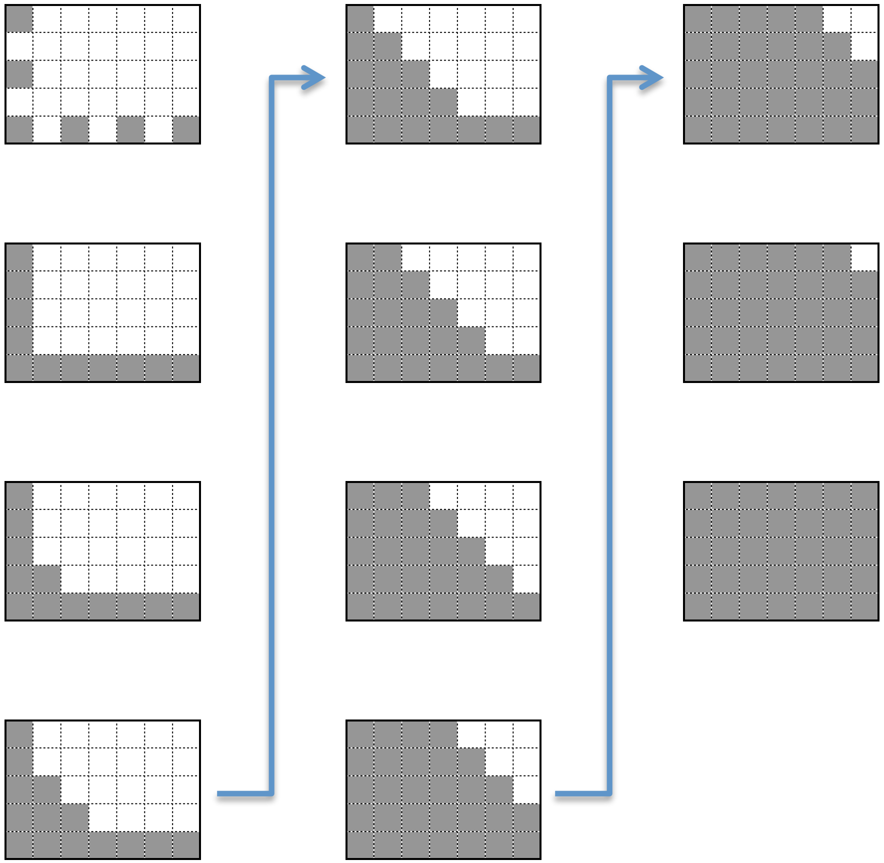
- Lorsque deux cases contaminent une troisième case,
  le **périmètre** total des surfaces contaminées est **invariant**



- Le périmètre de la grille est 2 x (5 + 7) = 24
- Le périmètre d'une case est 4
- Le minimum théorique est la contamination de 24 / 4 = 6 cases

Jour 2 – Problème 10 – La contagion

- Nous vérifions que
  le minimum théorique suffit



- La réponse est **6**

Jour 2 – Problème 11 – Le taxi

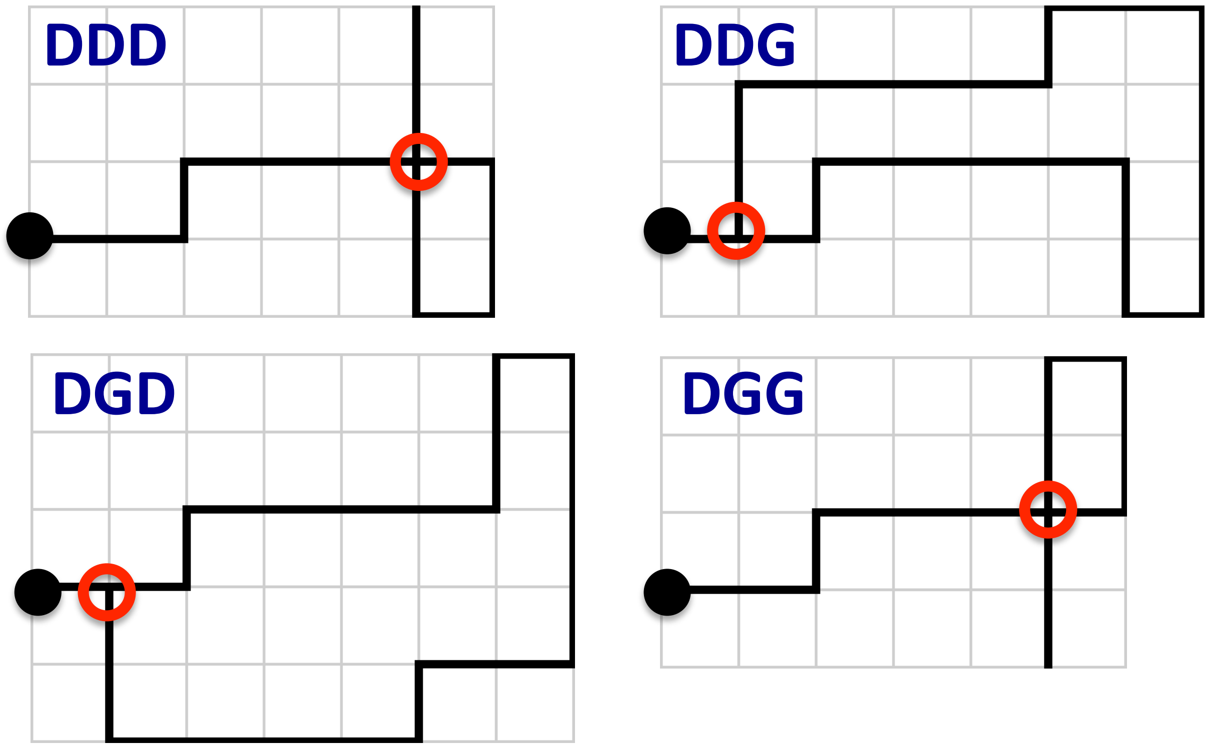
- Pour des raisons de symétrie, nous pouvons supposer que le taxi commence à rouler de 2 horizontalement vers la droite puis de 1 verticalement vers le haut

Horizontalement	**2**		**4**		**1**		**2**		**4**		**1**
Verticalement		**1**		**2**		**4**		**1**		**2**	

- Pour revenir au départ, il faut, horizontalement ou verticalement, que le taxi ait roulé autant dans un sens que dans l'autre
- Au minimum théorique, 24, deux cases de même couleur sont en sens opposé et le 4 gris est en sens opposé aux deux 2 gris
- Nous allons tester si 24 peut être atteint

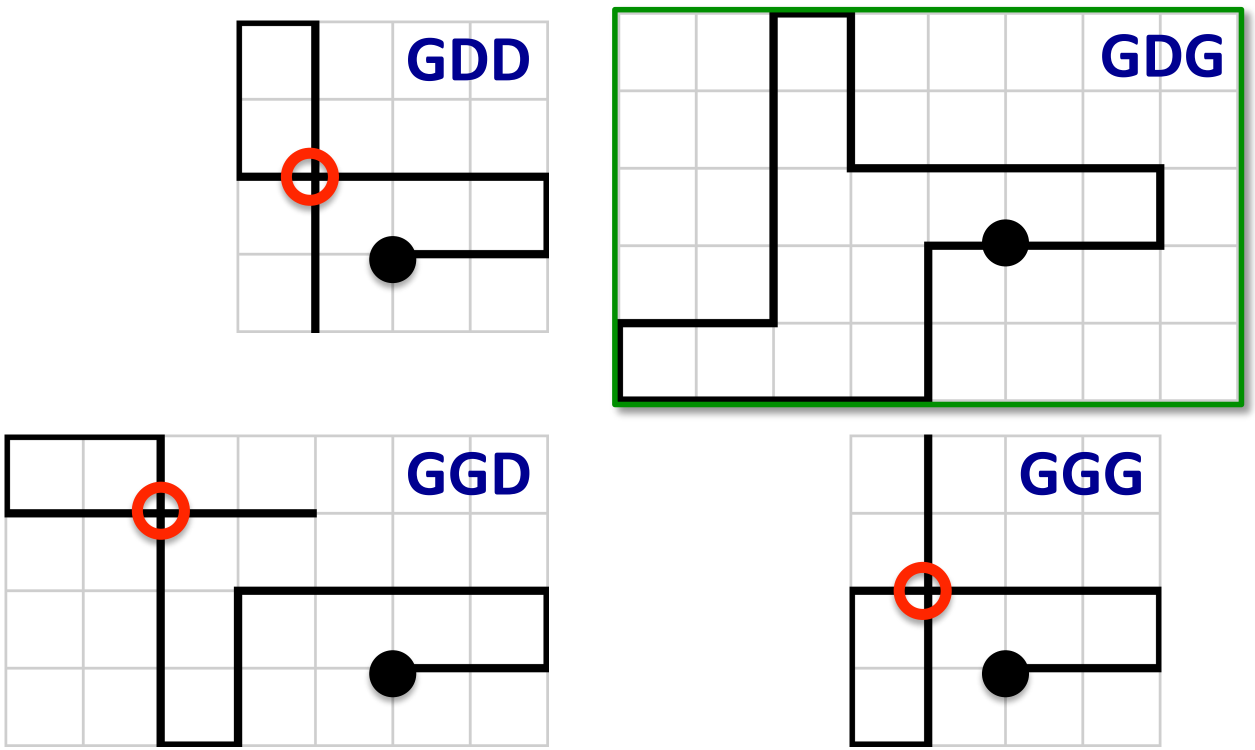
Jour 2 – Problème 11 – Le taxi

- Le taxi peut tourner trois fois à droite DDD, deux fois à droite puis une fois à gauche DDG, etc. (8 cas)



FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 11 – Le taxi



- Le minimum théorique peut être atteint, la réponse est **24** hectomètres
- *Nous avons démontré que seul GDG permet de l'atteindre*

Jour 2 – Problème 12 – Les rumeurs

- Après une conversation, à une permutation des nombres de 1 à 6 près, nous trouvons une configuration de base

1 2	1 2	3	4	5	6

- Après 2 conversations, nous trouvons deux configurations de base

1 2 3	1 2	1 2 3	4	5	6
1 2	1 2	3 4	3 4	5	6

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 12 – Les rumeurs

- Après 3 conversations, nous trouvons six configurations de base

1 2 3	1 2 3	1 2 3	4	5	6
1 2 3 4	1 2	1 2 3	1 2 3 4	5	6
1 2 3	1 2 4	1 2 3	1 2 4	5	6
1 2 3	1 2	1 2 3	4 5	4 5	6
1 2 3 4	1 2	1 2 3 4	3 4	5	6
1 2	1 2	3 4	3 4	5 6	5 6

- **Les cinq premières configurations** nécessitent 5 conversations de plus (**8** au total) pour que la rumeur N° 6 soit partagée entre les 6 personnes

Jour 2 – Problème 12 – Les rumeurs

- **La sixième configuration** nécessite 4 conversations de plus (**7** au total) pour que la rumeur N° 6 soit partagée entre les 6 personnes

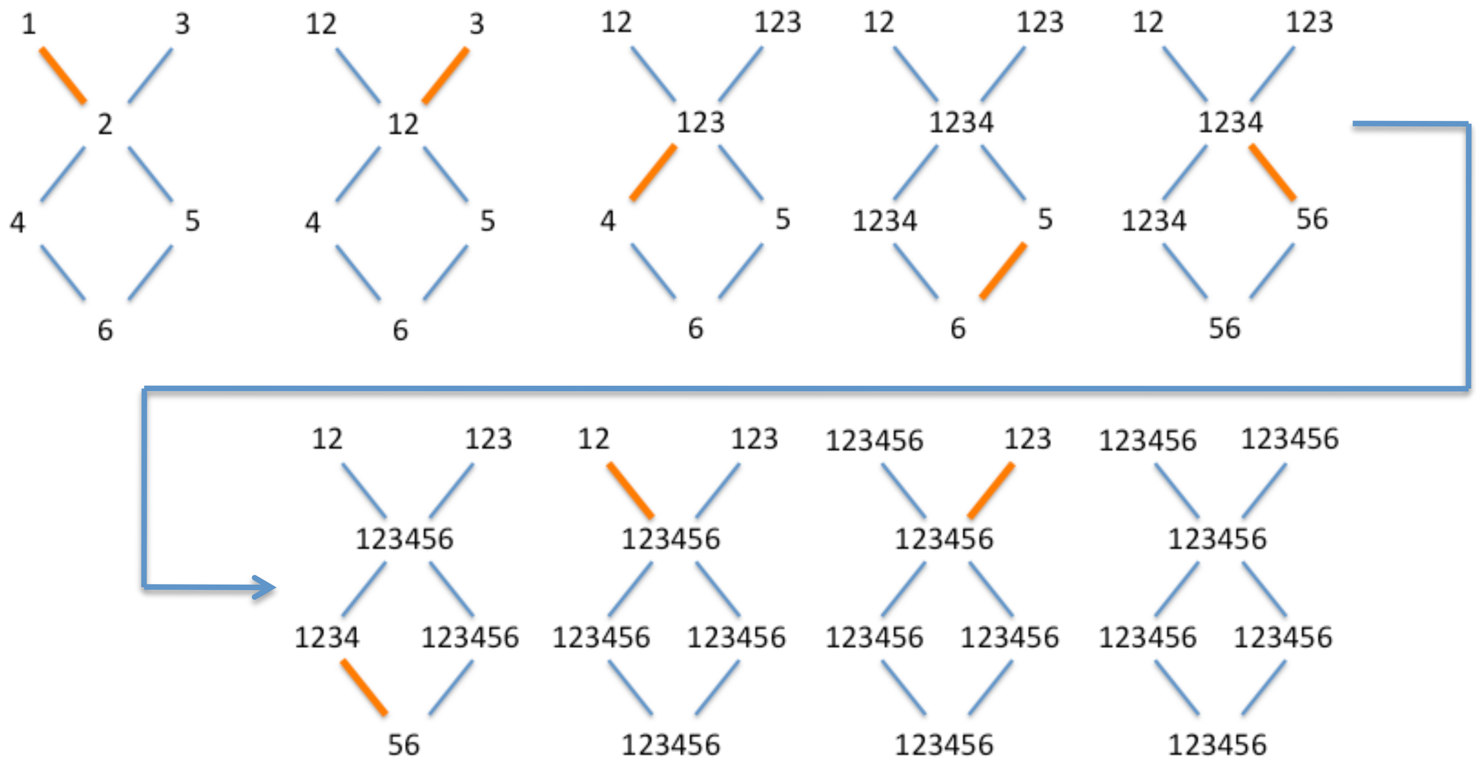
1 2	1 2	3 4	3 4	5 6	5 6

- **Mais** la symétrie implique que les mêmes conversations ne soient pas suffisantes pour que les cinq autres rumeurs soient partagées entre les 6 personnes
- Par exemple, la quatrième configuration suivante nécessite 4 conversations de plus (**8** au total) pour que la rumeur N° 5 ou 6 soit partagée entre les 6 personnes

1 2 3 4	1 2	1 2 3 4	3 4	5 6	5 6

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 12 – Les rumeurs

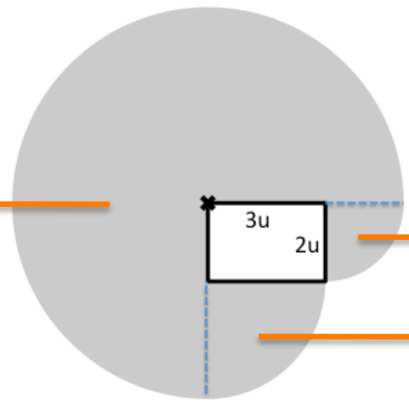


- Ces **8** **conversations** permettent d'atteindre l'objectif
- La réponse est **8**

Jour 2 – Problème 13 – La chèvre

- Soient 3u et 2u les longueur et largeur du rectangle

$3\pi(5u)^2/4 = 75\ \pi u^2/4$



$\pi(2u)^2/4 = \pi u^2$

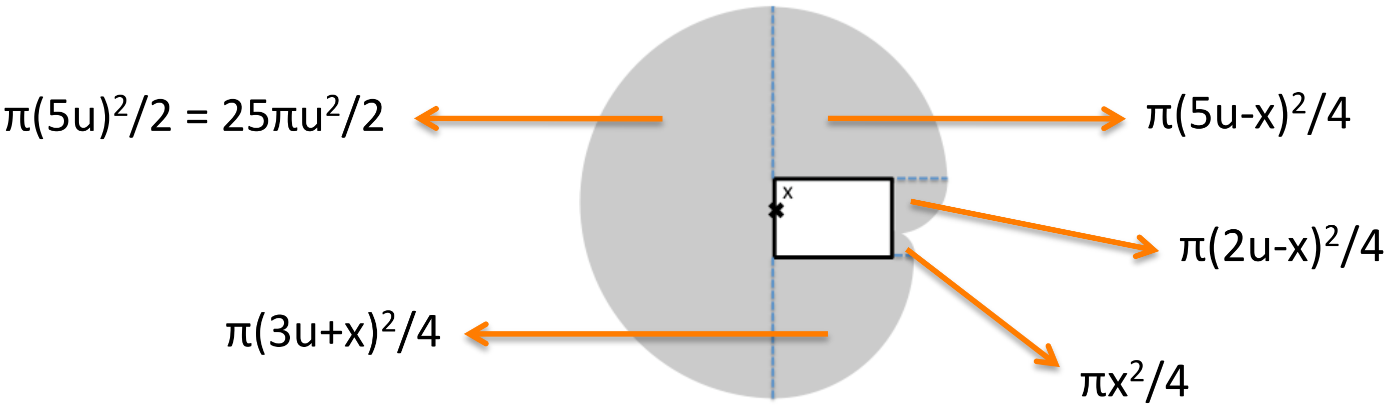
$\pi(3u)^2/4 = 9\ \pi u^2/4$

- La superficie que la chèvre peut atteindre est 88 ($\pi u^2/4$)
- $\pi u^2/4 = 1\ m^2$

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 13 – La chèvre

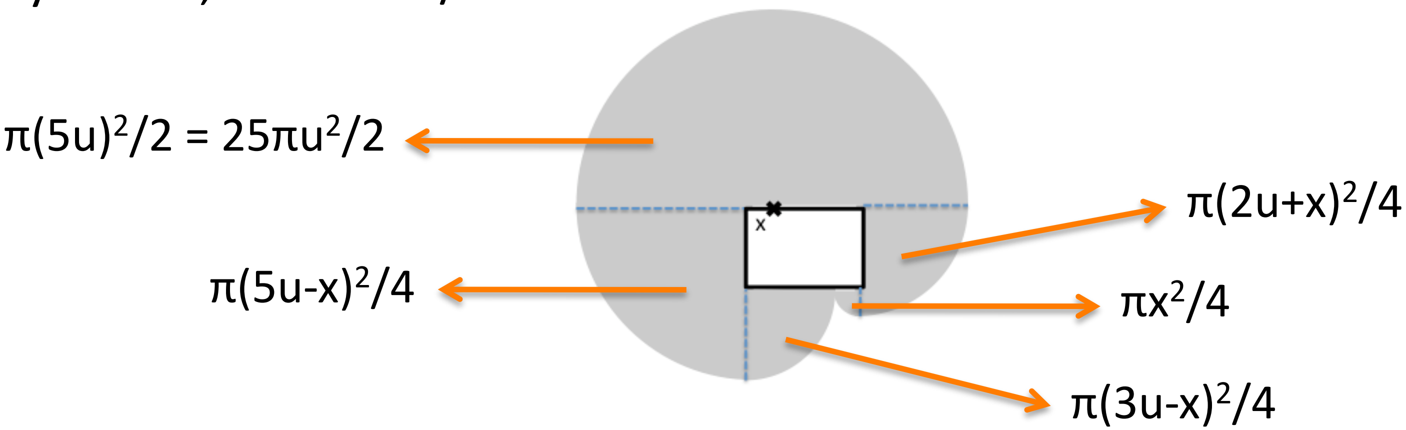
- Plaçons nous à la distance x d'un sommet **<u>sur une largeur</u>**
- Par symétrie, $0 \leq x \leq u$



- La superficie que la chèvre peut atteindre est, en m^2, $84 + 4(x/u - 1)^2$
- Nous retrouvons 88 en $x = 0$
- Elle atteint son minimum, **84**, en $x = u$ (au milieu de la largeur)

Jour 2 – Problème 13 – La chèvre

- Plaçons nous à la distance x d'un sommet **<u>sur une longueur</u>**
- Par symétrie, $0 \leq x \leq 3u/2$

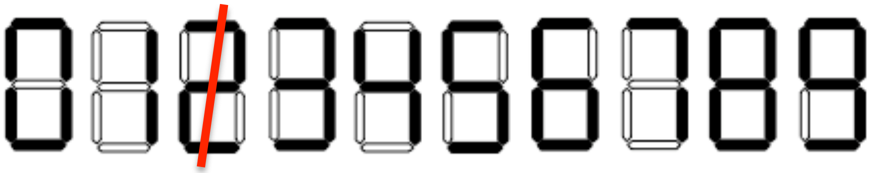


- La superficie que la chèvre peut atteindre est, en m^2, $79 + 9(2x/3u - 1)^2$
- Nous retrouvons 88 en $x = 0$
- Elle atteint son minimum, **79**, en $x = 3u/2$ (au milieu de la longueur), inférieur à **84**
- La réponse est **79** m^2

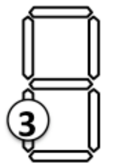
FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 14 – Devine segments

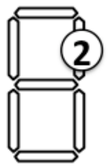
- La somme des nombres de 0 à 9 est 45, divisible par 9
- Le reste de la division de 2014 par 9 est 7
- Le chiffre 2 n'est pas utilisé



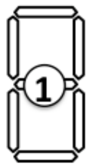
- Sur la première ligne, il y a 0, 6 et 8



- Sur la ligne du milieu, il y a 5



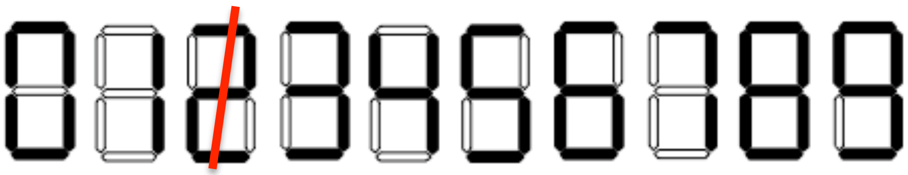
- Sur la ligne du bas, il y a 1 et 7



FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 14 – Devine segments

- Dans la colonne du milieu, le nombre de segments utilisés est 13



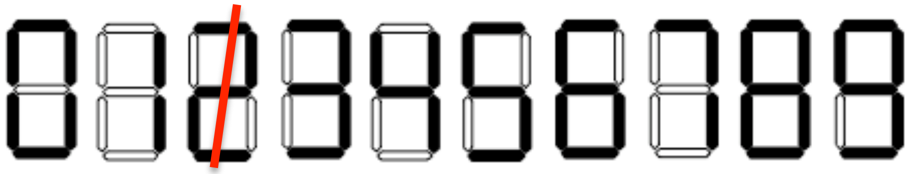
6 2 5 4 5 6 3 7 6

- Il y a 1 ou 7 (2 ou 3 segments) en bas car 4 + 5 + 6 = 15 > 13

- **<u>S'il y a 7 en bas</u>**, il manque 10 segments
- Il y a 0 ou 6 (6 segments) en haut et 4 (4 segments) au milieu
- Pour obtenir le 1 de 2014, il faut 0 en haut et une retenue de 0
- D'où une **contradiction** car les unités totalisent au moins 6 + 3 + 1 = 10

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 14 – Devine segments



6 2 5 4 5 6 3 7 6

- **<u>S'il y a 1 en bas</u>**, il manque 11 segments

- S'il y a 4 (4 segments) au milieu et 8 (7 segments) en haut
- 8 + 4 + 1 = 13 et une retenue de 0 ou 1 ne permettent pas d'obtenir le 1 de 2014
- D'où une **contradiction**

- Il y a **3** (5 segments) **au milieu** et 0 ou 6 (6 segments) en haut
- Pour obtenir le 1 de 2014, il faut 6 en haut et une retenue de 1

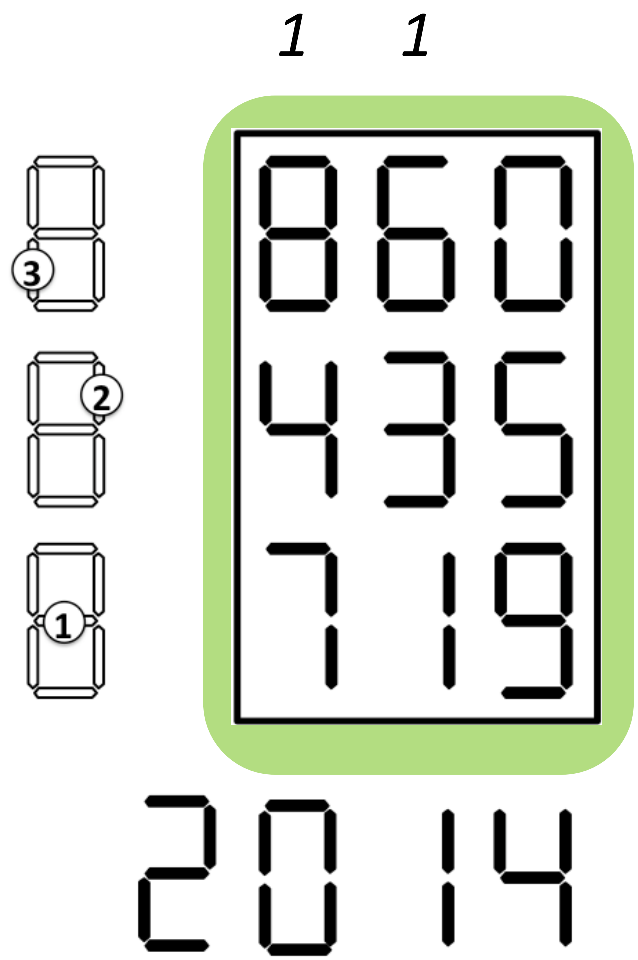
Jour 2 – Problème 14 – Devine segments

- En haut, 0 est forcément le chiffre des unités et 8 celui des centaines

- Dans la colonne à droite, les unités totalisent 14
- Il y a 5 au milieu et 9 en bas

- En bas, 7 est le chiffre des centaines
- On place le dernier chiffre, 4
- On vérifie que 1 (retenue) + 8 + 4 + 7 = 20

- C'est l'unique réponse

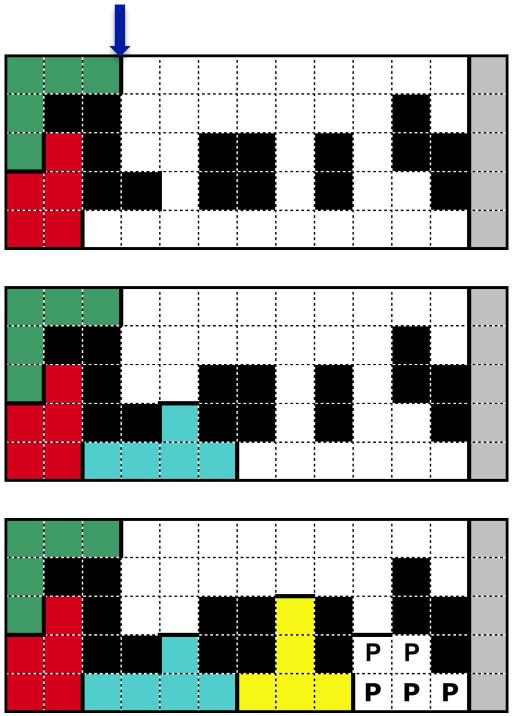


FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

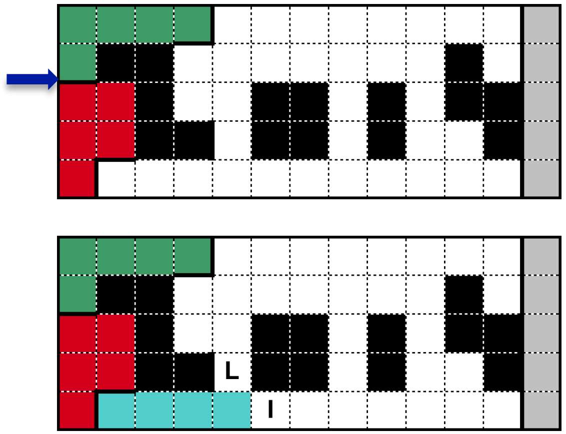
Jour 2 – Problème 15 – Les pentaminos de l’année

- Au coin supérieur gauche, il existe 5 endroits dans le couloir où positionner une séparation, donc **5 cas** à étudier

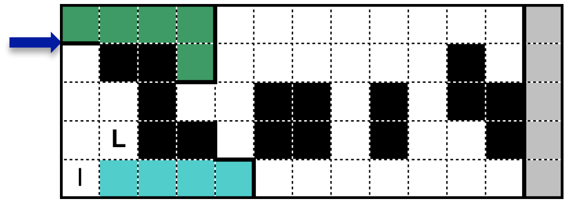
Cas 1



Cas 2

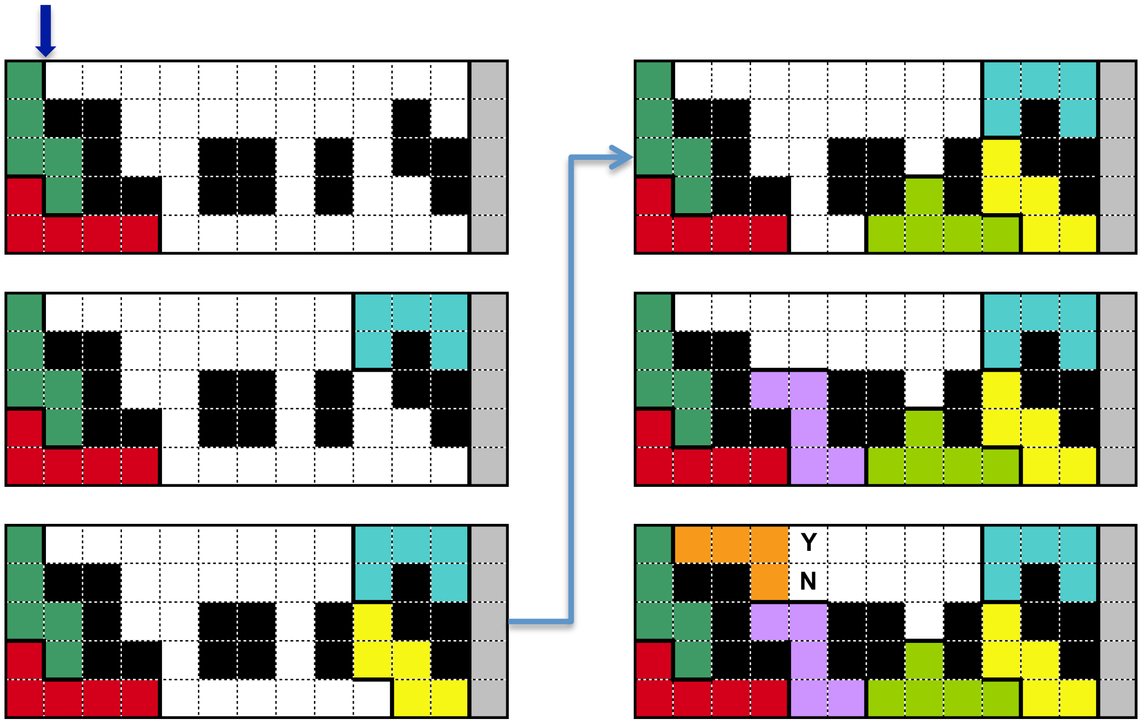


Cas 3



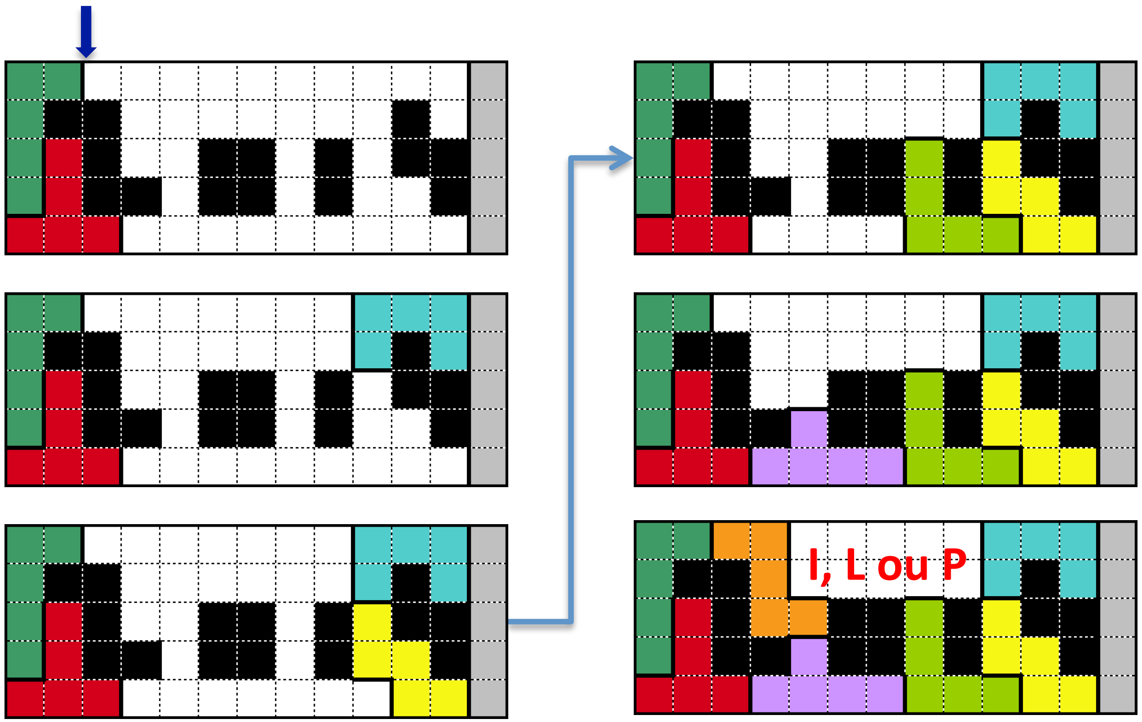
Jour 2 – Problème 15 – Les pentaminos de l'année

Cas 4



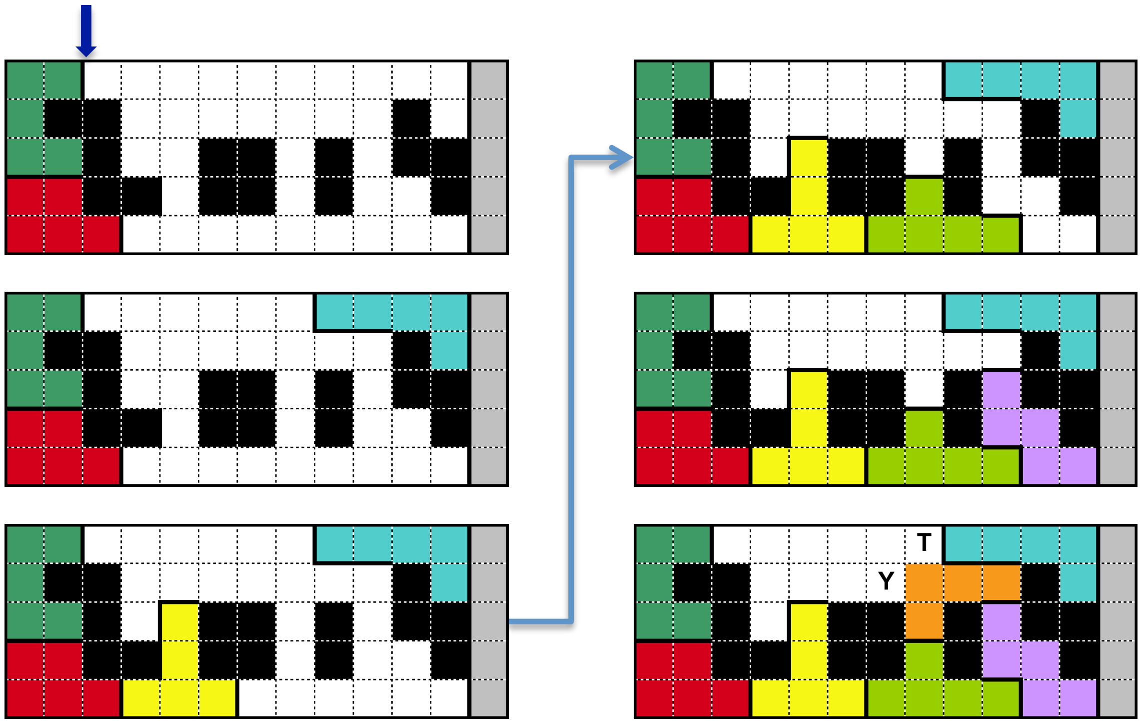
Jour 2 – Problème 15 – Les pentaminos de l'année

Cas 5a (L et T à gauche)



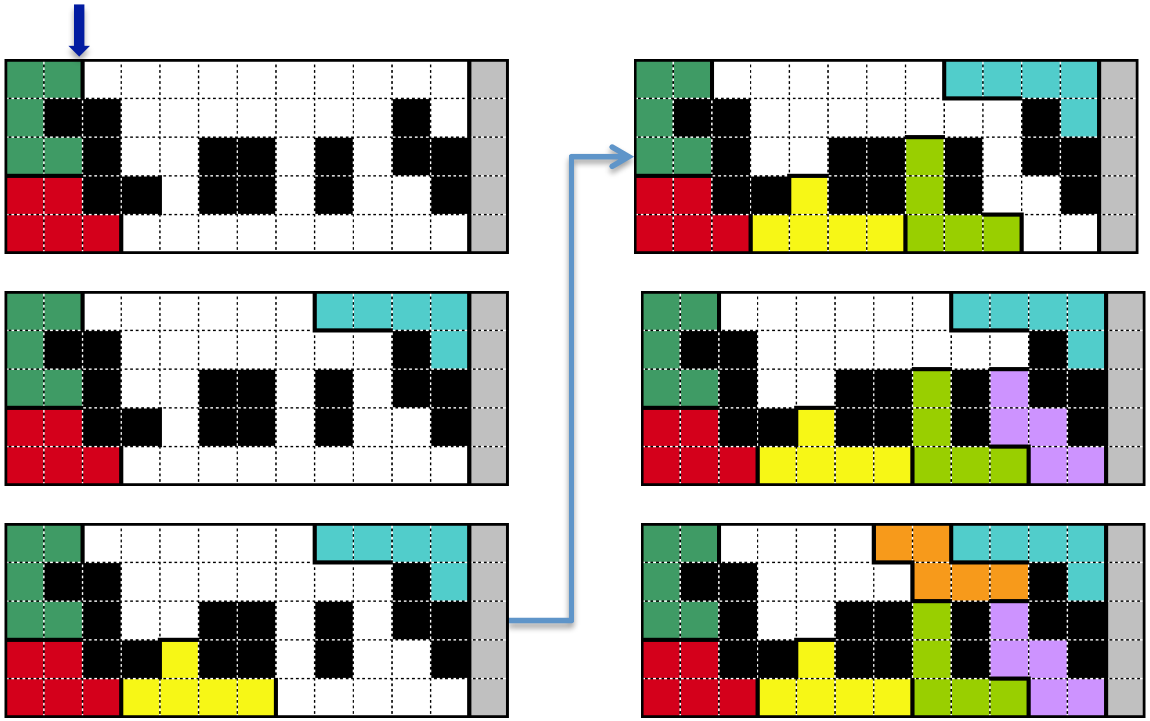
Jour 2 – Problème 15 – Les pentaminos de l'année

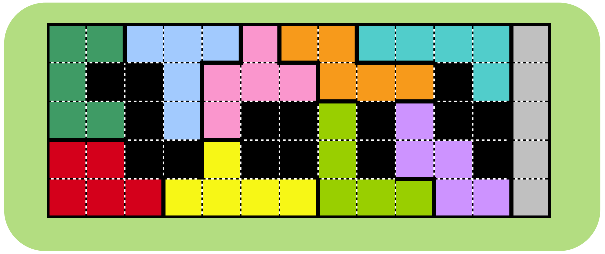
Cas 5b.1 (P et U à gauche, T)



Jour 2 – Problème 15 – Les pentaminos de l'année

Cas 5b.2 (P et U à gauche, Y)





- La réponse est unique
- *Ce sont les pentaminos X et Z qui ne sont pas utilisés*

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 16 – Le solide de l'année

- Soit S le nombre de sommets
- L'angle non compté dans la somme est, en degrés, 360(S - 2) – 2014 ou 360(S - 8) + 146 (théorème d'Euler-Descartes)
- L'angle est 146° et **S = 8**

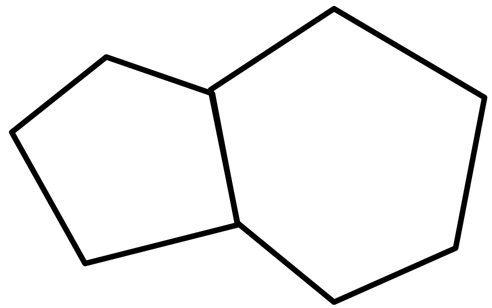
- Soit F_i le nombre de faces polygonales de i côtés pour $3 \leq i$, $\mathbf{F_3 = 3}$
- Le nombre d'arêtes est $S + \Sigma F_i - 2$
- En comptant (deux fois) les arêtes autour des faces, $\Sigma iF_i = 2(S + \Sigma F_i - 2)$
- $\Sigma(i-2)F_i = 12$ pour $3 \leq i$
- $\Sigma(i-2)F_i = 9$ pour $3 < i$

- $\mathbf{F_i = 0}$ **pour** $\mathbf{8 \leq i}$ (sinon il y a au moins 9 sommets)

Jour 2 – Problème 16 – Le solide de l'année

- $F_7 \leq 1$ (sinon $\Sigma(i-2)F_i \geq 10 > 9$ pour $3 < i$)
- Si $F_7 = 1$, alors 7 triangles rejoignent un sommet commun d'où partent 7 arêtes et $F_3 = 7 \neq 3$
- **$F_7 = 0$**

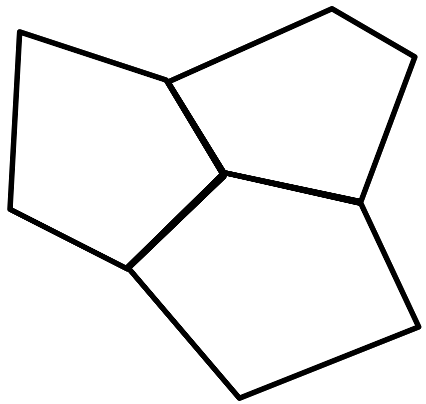
- $F_6 \leq 2$ (sinon $\Sigma(i-2)F_i \geq 12 > 9$ pour $3 < i$)
- Si $F_6 = 2$, alors $2 F_4 + 3 F_5 = 1$, impossible
- Si $F_6 = 1$, alors $2 F_4 + 3 F_5 = 5$, $F_4 = F_5 = 1$
- Même si l'hexagone et le pentagone partagent un côté commun, on compte déjà 9 sommets
- **$F_6 = 0$**



Jour 2 – Problème 16 – Le solide de l'année

- $F_5 \leq 3$ (sinon $\Sigma(i-2)F_i \geq 12 > 9$ pour $3 < i$)
- Si $F_5 = 0$, alors $2 F_4 = 9$, impossible
- Si $F_5 = 2$, alors $2 F_4 = 3$, impossible

- Si $F_5 = 3$, alors $F_4 = 0$
- Même si les 3 pentagones partagent un sommet commun et trois arêtes deux à deux, on compte déjà 10 sommets



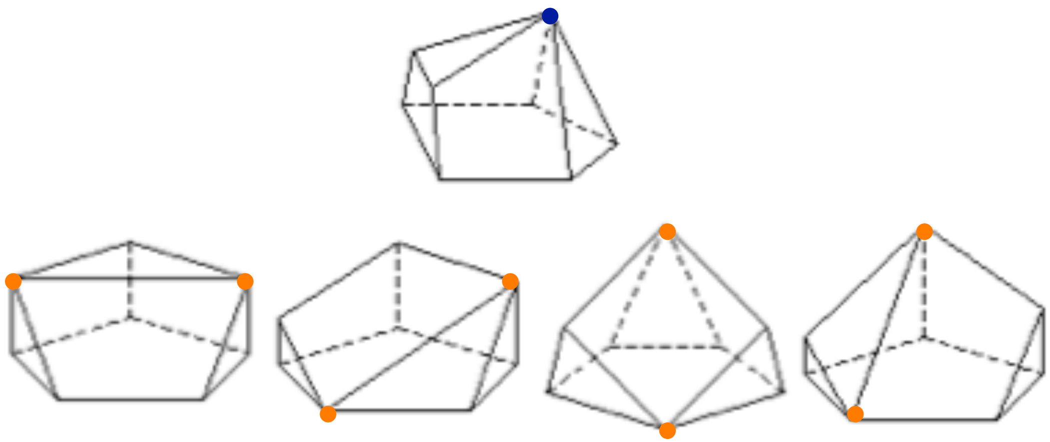
- **$F_5 = 1$**
- $2 F_4 = 6$, **$F_4 = 3$**
- Le solide est **un heptaèdre** (**$F = 7$**) **formé de 3 triangles, 3 quadrilatères et un pentagone**

Jour 2 – Problème 16 – Le solide de l'année

- Le nombre d'arêtes est 8 + 7 – 2 = 13
- Soit S_i le nombre de sommets dont partent i arêtes (de degré i) pour $3 \leq i$
- En comptant (deux fois) les arêtes aux sommets, $\Sigma i S_i = 26$
- $\Sigma(i-3)S_i = 2$

- $S_i = 0$ pour $5 < i$, $S_4 + 2\,S_5 = 2$
- $S_4 = 0$, $\mathbf{S_5 = 1}$ et $S_3 = \mathbf{7}$
- **Ou** $\mathbf{S_4 = 2}$, $S_5 = 0$ et $S_3 = \mathbf{6}$

- Il y a deux réponses, **6** ou **7**

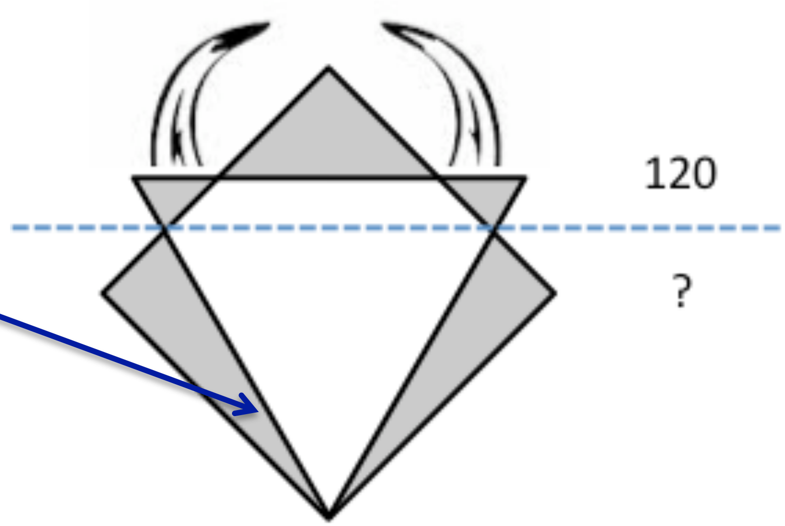


- *La figure illustre les 5 heptaèdres possibles (sur 34)*

FFJM - 28e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 2 – Problème 17 – Le casque de samouraï

- Nous supposons que le rayon du cercle est 1 (nous ferons une proportion à la fin)
- Le côté du carré est √2
- Le côté du triangle équilatéral est √3

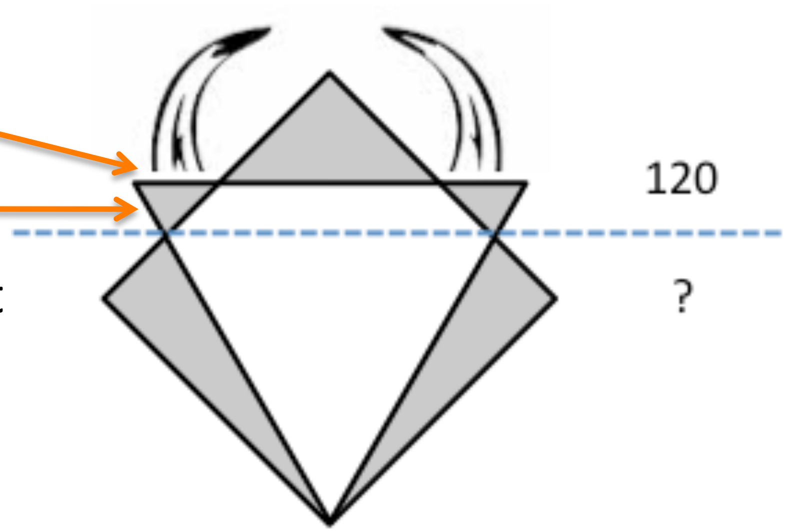


- Cet angle est 90 - (180-45-60) = 15°
- Cos30° = √3/2
- Cos15° = √((1+Cos30°)/2) = √2(√3+1)/4
- Sin15° = √((1-Cos30°)/2) = √2(√3-1)/4
- L'aire d'un triangle gris au dessous est 1/2 √2 (√2/Cos15°)Sin15° = (√3-1)/(√3+1) = 2-√3
- L'aire au dessous du trait est **2(2-√3)**

Jour 2 – Problème 17 – Le casque de samouraï

- L'aire du grand triangle gris au dessus est 1/4 (un huitième du carré)

- Ce côté est $(\sqrt{3}-1)/2$
- Ce côté est $\sqrt{3} - (\sqrt{2}/\cos 15°)$
  $= \sqrt{3} - 2(\sqrt{3}-1) = 2-\sqrt{3}$
- L'aire d'un petit triangle gris au dessus est
  $1/2\ ((\sqrt{3}-1)/2)\ (2-\sqrt{3})\ \sin 60° = (9-5\sqrt{3})/8$



- L'aire au dessus du trait est
  $1/4 + 2(9-5\sqrt{3})/8 = \mathbf{5(2-\sqrt{3})/4}$

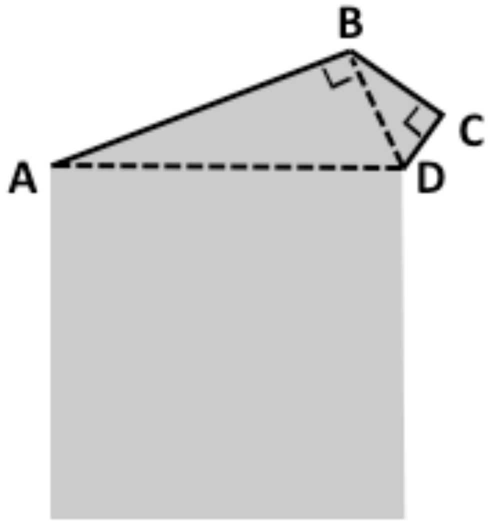
- La réponse est $120 \times\ \mathbf{2\cancel{(2-\sqrt{3})}}\ /\ (\mathbf{5\cancel{(2-\sqrt{3})}/4}) = \boxed{\mathbf{192}}$ cm^2 exactement

Jour 2 – Problème 18 – La cheminée de paquebot

- Le problème revient à chercher
  $0 < x < y < z$ et N entiers tels que
  $x^2 + y^2 + z^2 = 2014$ (1) et **$x + y + z = N^2$ (2)**

- $N^4 = (x + y + z)^2 < 3(x^2 + y^2 + z^2) = 6042$
- $8^4 = 4096$ et $9^4 = 6561$, $N \leq 8$

- $44^2 = 1936$ et $45^2 = 2025$, $44 < \sqrt{2014}$
- $44 < \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} < x + y + z = N^2$
- $7 \leq N$



- 2014 est pair, aucun ou deux des x, y et z sont impairs
- N est pair, **$N = 8$**

Jour 2 – Problème 18 – La cheminée de paquebot

- Sans préjuger de l'ordre de a, b et c (nous ordonnerons à la fin)

- $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 2013$ est divisible par 3
- *Modulo 3*, le carré de 0 est 0, le carré de 1 ou 2 est 1
- *Modulo 3*, la somme de trois carrés est 1 si, et seulement si, deux sont 0
- Deux des trois solutions, disons a et b, sont divisibles par 3
- **a = 3a'**, **b = 3b'**

- (c-1) = (64-a-b-1) est divisible par 3
- **c = 3c'+1**

Jour 2 – Problème 18 – La cheminée de paquebot

- $9a'^2 + 9b'^2 + (3c'+1)^2 = 2014$ **(1)**
- $a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2(c'-1)/3 = ((2014-1)/3 - 2)/3 = 223$
- $\mathbf{c' = 3c''+1}$, $c = 9c''+4$
- $\mathbf{a'^2} + \mathbf{b'^2} = 222 - 9c''^2 - 8c''$ **(1 bis)**

- $3a' + 3b' + (9c''+4) = 64$ **(2)**
- $\mathbf{a' + b'} = (64-4)/3 - 3c'' = 20 - 3c''$ **(2 bis)**

- $a'\,b' = ((\mathbf{a' + b'})^2 - \mathbf{a'^2} - \mathbf{b'^2})/2 = 89 + 9c''^2 - 56c''$ **(3)**

- Si c'' est 0 *Modulo 3*, alors a' + b' et a' b' sont 2 *Modulo 3*, ce qui est impossible
- $c'' \leq 6$ ($c < 64$), nous allons tester les **4 cas** c'' = 5, 4, 2 ou 1

Jour 2 – Problème 18 – La cheminée de paquebot

- $a' + b' = 20 - 3c''$ **(2 bis)**
- $a'\,b' = 89 + 9c''^2 - 56c''$ **(3)**

c’’	a’ + b’	a’ b’	a’	b’	a	b	c
5	5	34	-	-			
4	8	9	-	-			
2	14	13	1	13	3	39	22
1	17	42	3	14	9	42	13

- Il y a 2 réponses, **39, 22, 3** ou **42, 13, 9**

Nous vérifions que les sommes sont 64,
que $39^2 + 22^2 + 3^2 = 1521 + 484 + 9 = 2014$
et $42^2 + 13^2 + 9^2 = 1764 + 169 + 81 = 2014$